

平成26年度入試
個別学力試験問題（後期日程）

数 学
(数理・情報システム学科)

注 意

1. 問題紙は指示があるまで開いてはいけません。
2. 問題紙は2ページ，解答用紙は4枚です。指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入してください。
3. 答えはすべて解答用紙の所定のところに記入してください。
4. 解答用紙の裏面は使わないでください。
5. 各問題とも必ず解答の過程を書き，結論を明示してください。
小問に分けられているときは，小問の結論を明示してください。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけません。
7. 試験終了後，問題紙は持ち帰ってください。

1 次の条件をみたす四面体 ABCD を考える。

$$\angle BAC = \angle DAC = 45^\circ, \angle ACB = \angle ACD = 60^\circ, AB = BD = 2$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 辺 BC の長さを求めよ。
- (2) 辺 AC の長さを求めよ。
- (3) 点 P が辺 AC 上を動くとき、 $\triangle PBD$ の面積の最小値と最大値を求めよ。

2 $r > 0$ とし、数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{rx_n}{1+x_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $y_n = \frac{1}{x_n}$ とするとき、 y_{n+1} を y_n を用いて表せ。
- (2) $\{x_n\}$ が 0 に収束するための r の範囲を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ。

3 次の問いに答えよ。ただし $\lim_{t \rightarrow +0} t \log t = 0$ であることは用いてよい。

(1) $a > 0$ とする。このとき、関数

$$y = e^x - ax$$

の最小値を a を用いて表せ。

(2) $a > 0$ とする。このとき、直線 $y = ax + b$ と曲線 $y = e^x$ の共有点の個数が 1 個以下となるための a, b の条件を求めよ。また、この条件をみたす点 (a, b) 全体の領域を図示せよ。

(3) $0 < t < 1$ とする。(2) で求めた条件と $b \geq 0$ および $a \geq t$ をみたす点 (a, b) 全体の領域の面積を S_t とする。このとき、 $\lim_{t \rightarrow +0} S_t$ を求めよ。

4 $t > 0$ とし、 $A = t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。
このとき、次の問いに答えよ。

(1) $P^{-1}AP$ を求めよ。

(2) 自然数 n に対して、 $P^{-1}A^n$ を求めよ。

(3) A の表す移動によって、座標平面上の点 $(0, \sqrt{2})$ が移る点を Q_1 とし、点 Q_1 が移る点を Q_2 とする。以下同様に、 $n = 3, 4, \dots$ に対して、 A の表す移動によって点 Q_{n-1} が移る点を Q_n とする。次に、点 Q_n から直線 $y = x$ に垂線を引き、その交点を R_n とする。このとき、 $\triangle OQ_nR_n$ の面積が n によらず一定となるような t の値を求めよ。ただし、 O は座標平面の原点を表す。