平成２７年度入試

個別学力試験問題（前期日程）

数　　学

〔医　学　部　医　学　科
総合理工学部数理・情報システム学科〕

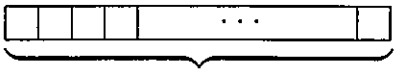
学部・学科	問題
医学部医学科	1, 3, 4, 5
総合理工学部数理・情報システム学科	2, 3, 4, 5

注　意

1. 問題紙は指示があるまで開いてはいけません。
2. 問題紙は３ページ，解答用紙は４枚です。指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入してください。
3. 医学部医学科の受験生は1, 3, 4, 5の問題を，総合理工学部数理・情報システム学科の受験生は2, 3, 4, 5の問題を解答してください。
4. 答えはすべて解答用紙の所定のところに記入してください。
5. 解答用紙の裏面は使わないでください。
6. 各問題とも必ず解答の過程を書き，結論を明示してください。小問に分けられているときは，小問の結論を明示してください。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけません。
8. 試験終了後，問題紙は持ち帰ってください。

1 （医学部医学科用問題） n を自然数とする。下図のように，同じ大きさの正方形のマスが 2^n 個描かれた透明なシート K_n を使って次のゲームを行う。

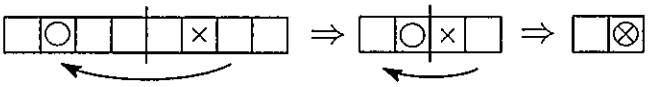
K_n :



2^n 個

まず，1 から 2^n までの自然数の中から無作為に一つ選ぶ試行を 2 回行い，1 回目に選ばれた自然数を x_1，2 回目に選ばれた自然数を x_2 とする ($x_1 = x_2$ となることもある)。このとき，K_n の左から x_1 個目のマスに ◯ を記入し，左から x_2 個目のマスに × を記入する。次に，このシートを中央の線（左右のマスの数が等しくなるような縦の線）で折り畳むという操作を繰り返し行い，◯ が書かれたマスと × が書かれたマスが重なったときゲームを終了する。ゲームが k 回の操作で終了したとき，得点を k とする。例えば，$n = 3, x_1 = 2, x_2 = 6$ のとき，下図のようになり，得点は 2 となる。

K_3 :



ただし，◯, × が始めから同じマスにある場合は得点を 0 とする。以上のゲームにおいて k 点を得る確率を $p(n,k)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $p(n,1)$ を求めよ。また，$n \geqq 2$ のとき，$p(n,2)$ を求めよ。

(2) $2 \leqq k \leqq n$ のとき，$p(n,k)$ を $p(n-1,k-1)$ を用いて表せ。

(3) $1 \leqq k \leqq n$ のとき，$p(n,k)$ を求めよ。

2 （総合理工学部数理・情報システム学科用問題） t を $0 < t < 1$ をみたす実数とする。xy 平面上の 3 点 $\mathrm{A}(-1, 1)$, $\mathrm{B}(0, -1)$, $\mathrm{C}(1, 1)$ に対し，線分 AB を $t : 1-t$ に内分する点を P とし，線分 BC を $t : 1-t$ に内分する点を Q とする。さらに，線分 PQ を $t : 1-t$ に内分する点を R とし，点 P と点 Q を通る直線を ℓ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 R の座標を t を用いて表せ。

(2) 直線 ℓ が曲線 $y = x^2$ の点 R における接線であることを示せ。

(3) t が条件 $0 < t < 1$ をみたしながら変化するとき，直線 ℓ が通過する領域を図示せよ。

3 （共通問題） xy 平面上に原点 O と 2 点 A, B がある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の大きさを 3, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の大きさを 4 とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角が $\dfrac{2\pi}{3}$ であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の大きさを求めよ。

(2) α が $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲にあり，$\sin\alpha = \dfrac{1}{4}$ をみたすとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角が 4α であるとき，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を求めよ。

(3) 点 $\mathrm{E}(1, 0)$ に対し，$4\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}} - 12\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \vec{0}$ が成り立つとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ。

4 （共通問題） $f(x) = xe^x$ とするとき，次の問いに答えよ。ただし e は自然対数の底とし，$2 < e < 3$，$\lim_{x \to \infty} xe^{-x} = 0$ であることは用いてよい。

(1) 関数 $y = f(x)$ の増減およびグラフの凹凸を調べ，そのグラフの概形をかけ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = -1$，$x = 1$ および x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ。

(3) t を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = f(t)\,a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める。$t \leqq \dfrac{1}{2}$ ならば，$\{a_n\}$ は収束することを示せ。

5 （共通問題） xy 平面において，点 $\mathrm{P}(x, y)$ と点 $(2, 0)$ の距離が，点 P と直線 $x = 1$ の距離の $\sqrt{2}$ 倍と等しくなるような点 P の描く曲線を C とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C の方程式を求めよ。

(2) t を 0 でない実数とし，曲線 C と直線 $x + y = t$ との交点を Q とする。点 Q の座標を t を用いて表せ。

(3) (2) で求めた点 Q から x 軸に下ろした垂線を QH とする。t が $2 \leqq t \leqq 4$ の範囲を動くとき，線分 QH が通過してできる図形の面積を求めよ。