平成２７年度入試

個別学力試験問題（後期日程）

数　　学

（数理・情報システム学科）

注　意

1. 問題紙は指示があるまで開いてはいけません。
2. 問題紙は２ページ，解答用紙は４枚です。指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入してください。
3. 答えはすべて解答用紙の所定のところに記入してください。
4. 解答用紙の裏面は使わないでください。
5. 各問題とも必ず解答の過程を書き，結論を明示してください。小問に分けられているときは，小問の結論を明示してください。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけません。
7. 試験終了後，問題紙は持ち帰ってください。

1 座標平面上を動く点 P が原点 O の位置にある。サイコロを投げ，

出た目が 1 または 2 であれば，点 P は x 軸の正の向きに 1 動く。
出た目が 3 であれば，点 P は x 軸の負の向きに 1 動く。
出た目が 4 または 5 であれば，点 P は y 軸の正の向きに 1 動く。
出た目が 6 であれば，点 P は y 軸の負の向きに 1 動く。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) サイコロを 5 回投げたとき，点 P が点 $(2, -1)$ にある確率を求めよ。

(2) サイコロを 6 回投げたとき，点 P が原点 O にある確率を求めよ。

2 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を考える。

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} - \frac{\sqrt{3}}{2}b_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

$$b_n = \frac{\sqrt{3}}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

n が自然数のとき，次の問いに答えよ。

(1) a_6 を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，a_{n+1} を a_n と a_{n-1} を用いて表せ。

(3) $a_{n+6} = a_n$ が成り立つことを示せ。

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} a_k$ を求めよ。

3 n を自然数，t を正の実数とする。

$$\mathrm{A}_n\left(-\frac{\sqrt{2}t}{2^n},\ \frac{1}{2^n},\ \frac{1}{2^n}\right),\ \mathrm{B}_n\left(\frac{\sqrt{2}}{2^n},\ \frac{t}{2^n},\ \frac{t}{2^n}\right),\ \mathrm{C}_n\left(0,\ \frac{3\cdot 2^n}{\sqrt{2}t},\ -\frac{3\cdot 2^n}{\sqrt{2}t}\right)$$

とするとき，次の問いに答えよ。ただし，O は座標空間の原点を表す。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}_n}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}_n}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}_n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}_n}$ をそれぞれ求めよ。

(2) 四面体 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ の体積を t を用いて表せ。

(3) (2) で求めた体積が最小となる t の値と，その最小値 V_n を求めよ。

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ の値を求めよ。

4 次の問いに答えよ。

(1) $f(x)=x^2-x-\log x$ とする。関数 $y=f(x)$ の増減およびグラフの凹凸を調べ，そのグラフの概形をかけ。なお，必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であることは用いてもよい。

(2) $g(x)=x^2-x$，$h(x)=\log x$ とする。このとき，曲線 $y=g(x)$，$y=h(x)$ はただ一つの共有点を持つことを示せ。また，その点での曲線 $y=g(x)$，$y=h(x)$ の接線の方程式を求めよ。

(3) 曲線 $y=h(x)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{e},-1\right)$ と原点 $\mathrm{O}(0,0)$ を結ぶ直線を ℓ とする。このとき，$x\geqq 0$ の範囲で，曲線 $y=g(x)$，$y=h(x)$ および直線 ℓ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。ただし，e は自然対数の底とする。