平成２７年度

島根大学大学院総合理工学研究科博士前期課程

総合理工学専攻

（物理・材料科学コース）

入試問題（第１次）

【 物理学 】

注　意

1　問題紙は，指示があるまで開いてはならない。

2　問題紙 6ページ，解答用紙 6枚である。

指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。

3　解答は，解答用紙に清書すること。

4　問題１から４までの４問は必須問題とする。問題５と６は選択問題とし，いずれか１問を選んで解答すること。また，選択した問題の解答用紙には所定欄に○を記入すること。

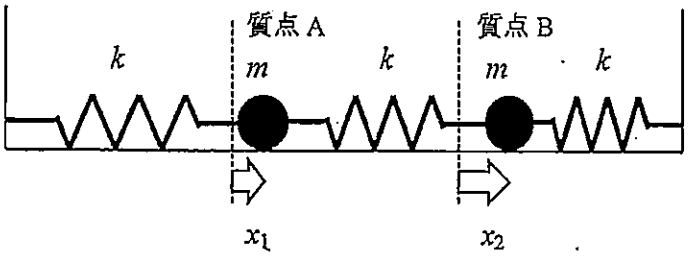
5　解答用紙はすべて回収するので持ち帰らないこと。

6　問題紙は，持ち帰ること。

総合理工学専攻
（物理・材料科学コース）　物理　問題

1

1次元の箱に閉じ込められた質量 m の質点A，Bについて，ばね定数 k のばねで壁および質点どうしが下図のようにつながれている場合を考える。以下の問いに答えよ。



(1) 質点A，Bのつりあいの位置からの変位をそれぞれ x_1，x_2 として，それぞれについて運動方程式を求めよ。

(2) (1)で求めた運動方程式より，質点A，Bの変位の和 q_1（$=x_1+x_2$）および差 q_2（$=x_1-x_2$）に注目し，それぞれについて運動方程式を求めよ。

(3) (2)で求めた運動方程式を解き，質点A，Bの変位の和 q_1 および差 q_2 が満たす一般解を求めよ。

(4) 質点A，Bの変位 x_1，x_2 が満たす一般解を求めよ。

(5) 初期条件として時刻 $t=0$ で，$x_1=l$，$x_2=-l$，$\dfrac{dx_1}{dt}=0$，$\dfrac{dx_2}{dt}=0$ が与えられたとき，質点A，Bは周期運動をする。このとき，それぞれの角振動数を求めよ。

2

(1) 真空中に半径 a の無限に長く厚さの無視できる円筒が置かれている。この円筒に電流 I が一様に流れているとき，円筒の中心軸からの動径方向の距離を r として，円筒の内側と外側に生じる磁束密度の大きさと方向をそれぞれ求めよ。ただし，真空の透磁率を μ_0 とする。

(2) 真空中に電流 I が流れる無限に長い導線が置かれている。この導線は図 1 のように原点 O で 2α の角を成して，xz 面上でV字に折れ曲がっている。原点から x 軸方向に距離 a だけ離れた点 A の磁束密度を考える。以下の問いに答えよ。ただし，真空の透磁率を μ_0 とする。

(a) 角度 α が 0 である場合と $\pi/2$ である場合の磁束密度の大きさと方向をそれぞれ求めよ。

(b) 図 1 の電流が作る磁束密度を計算するために，図 2 のように x 軸と角度 α で交わる無限に長い導線上の直線電流 I を考える。電流の流れる方向を z' 軸にとり，点 A から軸に下ろした垂線の足を z' 軸の原点 O′ とする。導線上の z' にある電流素片 Idz' が点 A につくる磁束密度の大きさと方向を求めよ。

(c) (b)の結果を用いて，図 3 のように無限遠から点 O までの電流が点 A につくる磁束密度の大きさと方向を求めよ。

(d) (c)の結果を用いて，図 1 に示したV字型の電流 I が点 A につくる磁束密度の大きさと方向を求めよ。

(e) 以上の結果を用いて，(d)で求めた磁束密度の大きさの α 依存性をグラフに描いて示せ。

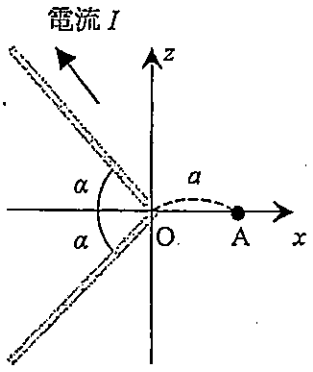


図 1

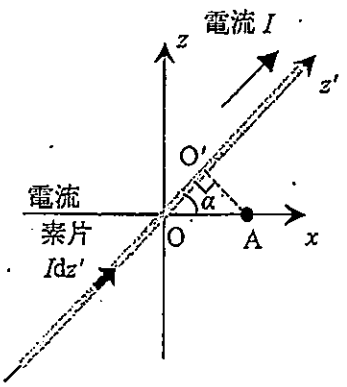


図 2

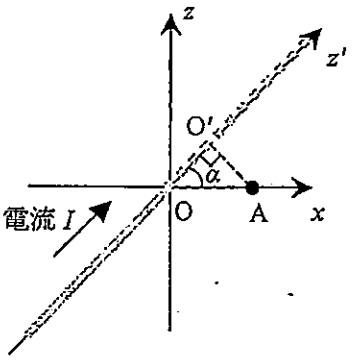


図 3

3

下図のようにN個の粒子がそれぞれ独立にエネルギー0かεの状態をとりうる２準位系を考える。以下の問いに答えよ。ボルツマン定数をk_Bとする。

(1) 全系のエネルギーEが$n\varepsilon$となる場合の数W_nを求めよ。

(2) (1)のときのエントロピーSをスターリングの公式($\log x! \cong x\log x - x$)を用いて求めよ。

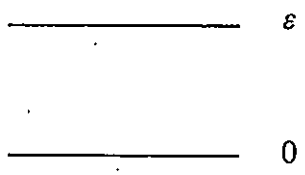
(3) 統計力学的温度の定義$\dfrac{\partial S}{\partial E} = \dfrac{1}{T}$を用いて，全系のエネルギー$E$を温度$T$の関数として求めよ。

本問の場合，$\dfrac{\partial}{\partial E} = \dfrac{\partial n}{\partial E}\dfrac{\partial}{\partial n}$である。

(4) 絶対零度および温度無限大でのEの値を求めよ。解答には式か言葉による説明をつけること。

(5) (4)の結果を参考にして，Eを温度の関数としてプロットしたグラフの概形を描け。絶対零度および温度無限大での傾きも考慮すること。

(6) (5)のグラフをもとに，比熱を温度の関数としてプロットしたグラフの概形を描け。



4

1次元調和振動子を考える。質量m，角振動数ω，換算プランク定数$\hbar$を1とする単位系では，ハミルトニアンは

$$H=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}x^2$$

で与えられる。この系の基底状態の波動関数とエネルギー固有値を，以下の二つの方法で求めよ。

(1) 以下の手順の変分法で基底状態の波動関数と固有値を求める。

(a) 規格化された試行関数を以下のように仮定する。

$$\phi(x)=\left(\frac{A}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{Ax^2}{2}}$$

ここで，Aは正の値を持つパラメータとする。この試行関数でのHの期待値$\langle H\rangle$を求めよ。ただしガウス積分の公式$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$と$\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\alpha x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$を用いてよい。

(b) 求めた$\langle H\rangle$が最小になる，試行関数のパラメータAを求めることで，近似的な基底状態の波動関数と固有値を求めよ。

(2) 次に，以下の演算子を導入する。

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right),\quad a^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$$

(a) 以下の関係式が成立することを示せ。

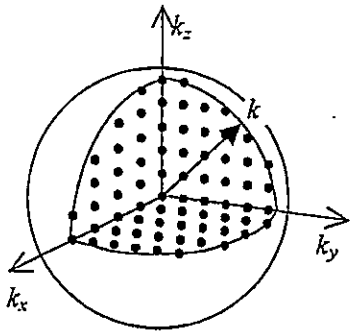
$$\left[a,a^\dagger\right]=1,\quad H=a^\dagger a+\frac{1}{2}$$

(b) Hの任意の固有値をλ，対応する固有関数を$\phi_\lambda(x)$と定義すると，$a\phi_\lambda(x)$は，$a\phi_\lambda(x)\neq 0$の場合，固有値$(\lambda-1)$に対応する固有関数であることを示せ。

(c) $\phi_\lambda(x)$にaを繰り返し作用させることにより，1ずつ低い固有値をもつ固有関数を構成できる。しかし，Hの固有値は明らかに負にはなりえないから，いつかは$\phi_{\lambda_0}(x)\neq 0$，$a\phi_{\lambda_0}(x)=0$をみたす$\lambda_0$に到達する。この$\phi_{\lambda_0}(x)$と$\lambda_0$が基底状態の波動関数と固有値である。これらを具体的に求めよ。ただし，$\phi_{\lambda_0}(x)$は規格化すること。

5

電子を１辺 L の立方体（体積 $V = L^3$）の中に閉じ込めた自由電子モデルを考える。電子の波動関数は平面波 $\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{V}}\exp(ik\cdot r)$で，その固有エネルギーは $\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ で与えられる。周期的境界条件 $\phi(x, y, z) = \phi(x+L, y, z) = \phi(x, y+L, z) = \phi(x, y, z+L)$ を考えたとき $k = (k_x, k_y, k_z)$ は離散的な値，$k_x = \frac{2\pi}{L}n_x$，$k_y = \frac{2\pi}{L}n_y$，$k_z = \frac{2\pi}{L}n_z$ （n_x，n_y，n_z は整数）をとる。右図は逆格子空間を示しており，各格子点が k の固有状態に対応している。立方体中の電子数を増やしていくと，逆格子はエネルギーの低い準位に対応する格子点から順に状態が占められ，球形に詰まっていく。以下の問いに答えよ。



(1) 逆格子空間において，１つの格子点が占める体積はいくらか。

(2) N 個の電子まで詰めたとき半径が k の球となった。スピン状態も考慮に入れて，N と k の関係を式で表せ。

(3) (2)で求めた関係式から N を ε の関数 $N(\varepsilon)$ として求めよ。

(4) (3)で求めた $N(\varepsilon)$ を ε で微分することによって，電子の状態密度 $D(\varepsilon)$ を求めよ。また，$D(\varepsilon)$ の ε 依存性を図に描いて示せ。

(5) ある金属において体積 V 中の電子数を N_0 個とする。N_0 個の電子を全て詰めたとき，電子の占める領域は半径 k_F の球（フェルミ球）となり，電子の持つ最大のエネルギーはフェルミエネルギー ε_F となる。ε_F を N_0，V を用いて表せ。

(6) 金属の電子密度 $n = (N_0/V)$を 2.7×10^{28} [m^{-3}] とするとき，フェルミ温度 T_F $(= \varepsilon_F/k_B)$を概算せよ。ただし，プランク定数 $\hbar = 1\times10^{-34}$ [J·s]，電子の質量 $m = 9\times10^{-31}$ [kg]，ボルツマン定数 $k_B = 1.4\times10^{-23}$ [J/K] とする。

(7) 状態密度を直接反映する物理量にパウリの常磁性磁化率 χ_P および電子比熱係数 γ がある。これらは自由電子モデルではそれぞれ，$\chi_P = 2\mu_B D(\varepsilon_F)$ （μ_B はボーア磁子），$\gamma = \pi^2 k_B^2 D(\varepsilon_F)/3$ で与えられる。これらの物理量のいずれかについて，なぜ $D(\varepsilon_F)$ が関係するのかを簡単に説明せよ。

6

図はCu-Zn二元系平衡状態図である。at%は原子パーセントを表す。以下の問いに答えよ。

(1) 図中 ① ② の領域では2相が平衡している。平衡する2相を，相記号を用いて示せ。

(2) 700℃および558℃において，水平線で表される不変系反応の名称を答えよ。
また，それぞれの反応式を相記号を用いて表せ。

(3) Cu-90at%Zn 合金を溶融状態から室温まで，十分にゆっくり冷却した。このときの相の変化について簡潔に説明せよ。説明には，図中の温度 T_1 と T_2 に必ず言及すること。また各相の量比や濃度を説明する必要はない。

(4) 一般的に固溶体とはどのようなものか説明し，固溶限の意味を述べよ。平衡状態図より，200℃における Cu 中の Zn の固溶限のおおよその値を読み取れ。

(5) Cu に Zn が固溶した合金を固溶限以下の組成で作製し，室温における電気伝導率を測定した。電気伝導率の Zn 濃度依存性について，予想される結果を図示し，なぜそのように予想されるかを説明せよ。

（この部分につきましては、著作権の関係により、公開しません。）

出典　長崎 誠三，平林 眞 編著『二元合金状態図集』アグネ技術センター，2001.