平成２７年度

島根大学大学院総合理工学研究科博士前期課程

総合理工学専攻

（数理科学コース）

入試問題（第１次）

【数　　学】

注　意

1　問題紙は，指示があるまで開いてはならない。

2　問題紙 ３ページ，解答用紙 ３枚，下書き用紙 １枚である。

指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。

3　解答は，解答用紙に清書すること。

4　問題紙と下書き用紙は，持ち帰ること。

平成27年度　総合理工学専攻
数理科学コース学力検査問題（必修）

次の2問をすべて解答せよ。

$\boxed{1}$ n 次実正方行列 A と実数 λ に対して

$$V_A(\lambda) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = \lambda v\}$$

とし，E_n は n 次単位行列，O_n は n 次零行列とする。次の問いに答えよ。

$B^2 = E_n$ を満たす n 次実正方行列 B に対して，以下の (1)–(5) が成り立つことを示せ。

(1) B の固有値は 1 または -1 である。

(2) $A_1 = \frac{1}{2}(B + E_n)$，$A_2 = -\frac{1}{2}(B - E_n)$ とおくと次が成り立つ。

$$V_{A_1}(1) = V_B(1), \quad V_{A_2}(1) = V_B(-1)$$

(3) (2) の A_1 と A_2 は次を満たす。

(i) $A_1 + A_2 = E_n$ かつ

(ii) $A_i^2 = A_i$ $(i = 1, 2)$，$A_1A_2 = A_2A_1 = O_n$.

(4) $\mathbb{R}^n$ は $V_{A_1}(1)$ と $V_{A_2}(1)$ の直和である。

(5) $P^{-1}BP$ が対角行列となるような正則行列 P が存在する。

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。

(1) $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，$I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x^n \sin x \, dx$ とおく。このとき，I_{n+2} と I_n の間に成り立つ漸化式を求めよ。さらに I_2 と I_3 を求めよ。

(2) $\alpha > 1$ のとき，広義積分 $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} \, dx$ が絶対収束すること，すなわち，$\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^\alpha}\right| \, dx$ が収束することをを示せ。

(3) 部分積分を用いて，$\alpha > 0$ のとき，広義積分 $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx$ が収束することをを示せ。

(4) $0 < \alpha < 2$ のとき，広義積分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx$ が収束することを示せ。

平成27年度　総合理工学専攻
数理科学コース学力検査問題（選択）

以下の5問から1問を選択し，解答せよ。

$\boxed{3}$ Gを群とする。SをGの部分集合とするとき，Sを含むGの部分群のなかで最小のものをSで生成される部分群という。$a, b \in G$に対し，$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$をaとbの交換子，$D(G) = [G, G]$を交換子全体$\{[a, b] \mid a, b \in G\}$で生成される$G$の部分群とする。次の問いに答えよ。

(1) $a, b, c \in G$に対して$[ab, c] = a[b, c]a^{-1}[a, c]$を示せ。

(2) 任意の$g \in G$と交換子$[a, b]$ $(a, b \in G)$に対し，$g[a, b]g^{-1} \in D(G)$が成り立つことを示せ。これより，$D(G)$はGの正規部分群であることがわかる。以下の問いではこのことを証明せずに用いてよい。

(3) 剰余群$G/D(G)$はアーベル群であることを示せ。

(4) Gの正規部分群Nに対し，$D(G) \subseteq N$ならば，全射準同型写像

$$f : G/D(G) \to G/N$$

が存在することを示せ。さらに，このことを用いて剰余群G/Nがアーベル群であることを示せ。

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ。

(1) 向きづけ可能な閉曲面Mに対するガウス・ボンネの定理を述べよ。

(2) 球面のオイラー数を計算せよ。

(3) $\mathbb{R}^3$内の単位球面S^2を$\mathbb{R}^3$内でいくら滑らかに変形しても，ガウス曲率Kを各点で常に$K \leq 0$となるようにはできないことを示せ。

$\boxed{5}$ (X,d) を距離空間, $\mathbb{R}$ を通常の位相をもつ実数直線, f を (X,d) から $\mathbb{R}$ への連続写像とする。また, 任意の $x,y \in X$ に対して,

$$\rho(x,y) = d(x,y) + |f(x) - f(y)|$$

とおく。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) ρ は X 上の距離であることを示せ。

(2) 恒等写像 $id_X : (X,d) \to (X,\rho)$ は同相写像となることを示せ。

(3) (X,d) は有界だが, (X,ρ) は有界とならないような (X,d) と f の例をあげよ。ただし距離空間 (X,d) が有界であるとは, ある正の数 M が存在して, 任意の $x,y \in X$ に対して, $d(x,y) < M$ となるときにいう。

$\boxed{6}$ $x > 0,\ y > 0$ のとき, 関数 $f(x,y) = x + y + xy - 2\log(xy)$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) $f(x,y)$ の最小値を求めよ。

(2) 問 (1) の最小値を k_0 をとおくとき, 定数 $k > k_0$ に対し, $f(x,y) = k$ で定義される陰関数 y の導関数を求めよ。

(3) $D = \{(x,y) | 0 < x < 1, 0 < y < x\}$ とおくとき, 次の積分を求めよ。

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy.$$

$\boxed{7}$ 実数の数列に関する次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ において, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ が成り立つならば, 任意の実数 a, b に対して $\lim_{n\to\infty}(ax_n + by_n) = ax + by$ が成り立つことを示せ。

(2) 収束する数列の極限値はただ 1 つであることを示せ。

(3) 上に有界な数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ に対して, 不等式

$$\sup(a_n + b_n) \leq \sup a_n + \sup b_n \qquad (*)$$

が成立する。ただし $\sup a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とする。このとき,

(i) 不等式 $(*)$ を証明せよ。

(ii) 不等式 $(*)$ において, 等号は一般には成立しないことを示せ。

(iii) $\{a_n\}, \{b_n\}$ が単調増加数列ならば, 不等式 $(*)$ において等号が成立することを示せ。