平成２７年度

島根大学大学院総合理工学研究科博士前期課程

総合理工学専攻

（数理科学コース）

入試問題（第２次）

【数　　学】

注　意

1　問題紙は，指示があるまで開いてはならない。

2　問題紙　２ページ，解答用紙　３枚，下書き用紙　１枚である。

指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。

3　解答は，解答用紙に清書すること。

4　問題紙と下書き用紙は，持ち帰ること。

平成27年度　総合理工学専攻
数理科学コース学力検査問題（必修）

次の2問をすべて解答せよ。

$\boxed{1}$ A を n 次実正方行列とする。実数 a, b は A の相異なる固有値で，どちらも0でないとする。固有値 a, b に対する A の固有ベクトルをそれぞれ v_a, v_b とする。さらに，線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $f(x) = Ax$ と定める。次の問いに答えよ。

(1) A が正則のとき, f は全単射であることを示せ。

(2) v_a, v_b は1次独立であることを示せ。

(3) $\mathbb{R}^n$ の部分空間 $V = \{kv_a + \ell v_b \mid k, \ell \in \mathbb{R}\}$ に対し, $f(V)$ の基底を1組求めよ。

(4) 任意の多項式 $g(t) = c_m t^m + c_{m-1}t^{m-1} + \cdots + c_1 t + c_0$ $(c_0, \cdots, c_m \in \mathbb{R})$ に対し,

$$g(A) = c_m A^m + c_{m-1}A^{m-1} + \cdots + c_1 A + c_0 E_n$$

とおく。ただし E_n は n 次単位行列である。$g(a) = 0$ ならば, $g(A)$ は正則ではないことを示せ。

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。

(1) I を開区間 $(-1, 1)$ とする。$f \in C^\infty(I)$ とするとき，$n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\, dt$$

と表せることを数学的帰納法により証明せよ。

(2) $f(x) = -\log(1-x)$ とする。$n = 1, 2, \ldots$ に対して $f^{(n)}(x)$ を求めよ。

(3) $0 < t < x < 1$ のとき，$0 < \dfrac{x-t}{1-t} < x$ であることを示せ。

(4) $0 < x < 1$ のとき，$f(x) = -\log(1-x)$ のマクローリン級数（$x = 0$ におけるテイラー級数）は収束して $f(x)$ に等しいことを示せ。また，$f(x)$ のマクローリン級数を求めよ。

平成27年度　総合理工学専攻
数理科学コース学力検査問題（選択）

以下の $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ から1問を選択し，解答せよ。

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ。

(1) X, Y を位相空間，$f : X \to Y$ を全射連続写像とする。このとき，もし X が連結であれば，Y もまた連結であることを示せ。

(2) $\mathbb{R}^2$ を2次元ユークリッド空間とし，$A_0 = \{(0,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1\}$ とする。また，任意の自然数 $i \in \mathbb{N}$ に対して，

$$A_i = \left\{ \left(\frac{1}{i},\ y \right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

とし，$\mathbb{R}^2$ の部分空間

$$Z = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$$

から閉区間 $[0,\ 1]$ への写像 $g : Z \to [0,\ 1]$ を

$$g(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{y}{i} & ((x,\ y) \in A_i \text{となる} i \in \mathbb{N} \text{が存在するとき}) \\ y & ((x,\ y) \in A_0 \text{のとき}) \end{cases}$$

によって定める。このとき，

(i) g は点 $(0,1)$ で連続でないことを示せ。

(ii) B を Z の連結な部分集合とするとき，$B \subset A_i$ となる $i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ が存在することを示せ。

(iii) B を Z の連結な部分集合とするとき，$g(B)$ もまた連結であることを示せ。

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ。

(1) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ とおくとき，次の2階偏導関数を求めよ。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

(2) xy 平面の領域 $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < x\}$ を図示せよ。

(3) 点 (x,y) を極座標 (r,θ) に変換したとき，問(2)の D に対応する領域が

$$\Omega = \left\{ (r,\theta) : -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < r < \boxed{\text{ア}} \right\}$$

であるとする。$\boxed{\text{ア}}$ にあてはまる値を θ を用いて表わせ。

(4) 積分

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\, dxdy$$

を求めよ。