平成２９年度編入学者選抜試験【一般選抜】問題

数　学

（総合理工学部 数理・情報システム学科 数理系）

注　意

1　問題紙は指示があるまで開いてはいけない。

2　問題紙は２ページである。解答用紙は４枚である。指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。

3　答えはすべて解答用紙の所定のところに記入すること。

4　解答用紙は持ち帰ってはいけない。

5　試験終了後，問題紙は持ち帰ること。

平成29年度編入試験問題

問題 1. （この問題の解答は$\boxed{\text{問題1(1枚目)}}$と$\boxed{\text{問題1(2枚目)}}$に記入すること。）

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) A の固有値を求めよ。

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ。

2. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) v_1, v_2, v_3 は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ。

(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, f(v_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, f(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となるような線形写像とする。f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ と像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求めよ。

3. $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x - 3y + z = 0 \right\}$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であることを示せ。

(2) W の次元を求めよ。

(3) v を W に属さない $\mathbb{R}^3$ のベクトルとし，$U = \{kv \mid k \in \mathbb{R}\}$ とする。このとき，次が成り立つことを示せ。

$$W + U = \mathbb{R}^3, \quad W \cap U = \{0\}$$

ただし $W + U = \{w + u \mid w \in W,\ u \in U\}$ である。

問題 2.

1. (この問題の解答は$\boxed{\text{問題 2(1 枚目)}}$に記入すること。)
閉区間 $[a,b]$ で連続で，開区間 (a,b) で微分可能である関数 $f(x)$ に対して，次の命題（平均値の定理）が成り立つ。

あある c $(a<c<b)$ が存在して

$$(*) \qquad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

次の問いに答えよ。

(1) $f(x)=x^2$ のとき，区間 (a,b) において，$(*)$ が成り立つような c を求めよ。

(2) 閉区間 $[a,b]$ で連続かつ，開区間 (a,b) で 2 回微分可能でつねに $f''(x)>0$ をみたす関数 $f(x)$ を考える。このとき，区間 (a,b) において関数

$$F(x)=\frac{f(b)(x-a)+f(a)(b-x)}{b-a}-f(x)$$

はつねに正であり，かつ $F(x)$ の極大値が区間 (a,b) において，ただ一つだけ存在することを示せ。

(3) $b>a>1$ とする。次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{b^2-a^2}{2ab}>\log\frac{b}{a}\ .$$

2. (この問題の解答は$\boxed{\text{問題 2(2 枚目)}}$に記入すること。)

(1) $D=\{(x,y):0<x,0<y,x+y<1\}$ とする。変数変換 $x=u-uv, y=uv$ により，D にうつされる (u,v) 平面の領域を求めよ。

(2) D は問 (1) と同じとする。重積分 $\displaystyle\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dxdy$ を計算せよ。

(3) 関数 $f(x,y)=x^2+xy+y^2+3x+6y$ の極値を求めよ。