

平成30年度入試
個別学力試験問題（前期日程）

数 学

[医 学 部 ・ 医 学 科]
[総 合 理 工 学 部 ・ 数 理 科 学 科]

注 意

1. 問題紙は指示があるまで開いてはいけません。
2. 問題紙は2ページ、解答用紙は4枚です。指示があってから確認し、解答用紙の所定の欄に受験番号を記入してください。
3. 答えはすべて解答用紙の所定のところに記入してください。
4. 解答用紙の裏面は使わないでください。
5. 各問題とも必ず解答の過程を書き、結論を明示してください。
小問に分けられているときは、小問の結論を明示してください。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけません。
7. 試験終了後、問題紙は持ち帰ってください。

〈補足〉

数学（医学部医学科，総合理工学部数理科学科）

2 ページ

大問 3 (2) の解答において，

x または y のみを用いて表してもよい。

1 次の問いに答えよ。

- (1) n が 3 で割って 1 余る自然数であるとき, $1+n+n^2$ は 3 の倍数であることを示せ。
- (2) すべての自然数 n に対し, $n(n+1)(1+n+n^2)$ は 3 の倍数であることを示せ。
- (3) すべての自然数 n, k に対し,

$$n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)(1+n+n^2+\cdots+n^{k+1})$$

は $k+2$ の倍数であることを示せ。

2 曲線 C を時刻 t ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) によって

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = y(t), y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

と媒介変数表示される動点 $P(x, y)$ の軌跡とする。また, $0 < x < 1$ のとき, $P(x, y)$ における曲線 C の接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - \pi x}{\pi \sqrt{1 - x^2}}$$

で与えられているとする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 時刻 $t = \frac{\pi}{4}$ のときの点 P における曲線 C の接線の傾きを求めよ。
- (2) 時刻 t ($0 < t < \frac{\pi}{2}$) における点 P の y 軸方向の速度 $\frac{dy}{dt}$ を t を用いて表せ。
- (3) $y(t)$ を t を用いて表せ。
- (4) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

3 $\triangle AOP$ が次の条件 (i), (ii) をみたしている。

(i) $OA = 1$

(ii) $\angle APO = 60^\circ, 0^\circ < \angle AOP < 90^\circ, 0^\circ < \angle OAP < 90^\circ$

直線 AP に関して O と対称な点を B とし、直線 BP に関して A と対称な点を C とおき、線分 OB と線分 AP の交点を M 、線分 OB と線分 AC の交点を Q とおく。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 3 点 O, P, C が一直線上にあることを示せ。

(2) $x = OM, y = AM$ とするとき、線分 OP, AP, BQ の長さをそれぞれ x, y を用いて表せ。

(3) $\theta = \angle AOB$ とする。条件 (i), (ii) をみたす $\triangle AOP$ のうちで、線分 OC の長さが最大となる場合の θ の値を求めよ。

4 2 枚のコインを同時に投げたとき、共に表が出るか共に裏が出れば一致が起こったという。大小 2 つの公正なコインを同時に投げる操作を n 回繰り返したとき、連続して一致が起こった回数の最大値が M である確率を $p(n, M)$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $p(4, 2)$ を求めよ。

(2) $p(2k, k)$ を求めよ。

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} p(2k, k)$ を求めよ。ただし、 $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{2^m} = 0$ であることを用いてもよい。