

平成30年度入試
個別学力試験問題（後期日程）

数 学

[数 理 科 学 科]

注 意

1. 問題紙は指示があるまで開いてはいけません。
2. 問題紙は2ページ、解答用紙は4枚です。指示があってから確認し、解答用紙の所定の欄に受験番号を記入してください。
3. 答えはすべて解答用紙の所定のところに記入してください。
4. 解答用紙の裏面は使わないでください。
5. 各問題とも必ず解答の過程を書き、結論を明示してください。
小間に分けられているときは、小問の結論を明示してください。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけません。
7. 試験終了後、問題紙は持ち帰ってください。

1 円 $C : x^2 + y^2 = 25$ と点 $P(7, 1)$ がある。点 P から円 C に二つの接線を引き、それらの接点を A, B とする。また、点 P から円 C と 2 点で交わる直線 $\ell : x = v_1 t + 7, y = v_2 t + 1$ を引く。ただし、 t は変数で $v_1 < 0, v_1^2 + v_2^2 = 1$ である。 ℓ と C との交点を Q, R とし、 ℓ と直線 AB との交点を S とする。このとき、次の問い合わせに答えよ。

- (1) 直線 AB の方程式を求めよ。
- (2) PS の長さを c とするとき、 c を v_1 と v_2 を用いて表せ。
- (3) PQ, PR の長さをそれぞれ a, b とするとき、次が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}.$$

2 次の問い合わせに答えよ。

- (1) a を定数とする。関数 $f(x)$ が微分可能なとき、

$$f'(x) + af(x) = e^{-ax} (f(x)e^{ax})'$$

が成り立つことを示せ。

- (2) 不定積分 $\int e^{3x} \cos 2x \, dx$ を求めよ。

- (3) 等式

$$f(x) = \sin 2x - 3 \int_0^x f(t) dt$$

をみたす関数 $f(x)$ を求めよ。

- (4) n を自然数とする。(3) で求めた関数 $f(x)$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n\pi)$ を求めよ。

3 a を実数, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。

$$f(\theta) = \sin 2\theta - 2a(\sin \theta + \cos \theta)$$

とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $t = \sin \theta + \cos \theta$ とするとき, t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $f(\theta)$ を t の式で表せ。
- (3) $a = \frac{1}{2}$ のとき, $f(\theta)$ の最小値を求めよ。また, そのときの θ の値をすべて求めよ。
- (4) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において, 不等式 $f(\theta) > -3$ が常に成り立つような a の値の範囲を求めよ。

4 直線 $\ell : y = x$ と曲線 $C : y = \sqrt{3 - 4x}$ との交点を $A(a, a)$ と表すとき, 次の問いに答えよ。

- (1) a を求めよ。
- (2) $0 < k < a$ とし, 直線 $y = k$ と直線 ℓ との交点を P, 直線 $y = k$ と曲線 C との交点を Q, 点 $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ を R とするとき, $\triangle PQR$ の面積 $S(k)$ を k を用いて表せ。
- (3) $S(k)$ の $0 < k < a$ における最大値を求めよ。