

平成27年度編入学者選抜試験【一般選抜】問題

数 学

(総合理工学部 数理・情報システム学科 数理系)

注 意

- 1 問題紙は指示があるまで開いてはいけない。
- 2 問題紙は2ページである。解答用紙は4枚である。指示があつてから確認し、解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
- 3 答えはすべて解答用紙の所定のところに記入すること。
- 4 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
- 5 試験終了後、問題紙は持ち帰ること。

問題 1.

次の I, II, III に答えよ。 \mathbb{R} は実数全体を表すものとする。

I (1) 次の行列 A と行列 A' の階数を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4a+13 \\ 3 & 0 & 4 & a \end{pmatrix}$$

(2) 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x - y + 3z = 4a+13 \\ 3x + 4z = a \end{cases}$$

の解が存在するための必要十分条件を (1) で求めた階数を用いて述べよ。さらに、解が存在するような a の値をすべて求めよ。

(3) (2) の連立 1 次方程式が解をもつとき、その一般解を求めよ。

II 行列 $B = \begin{bmatrix} 2 & b & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{bmatrix}$ について、次の問い合わせに答えよ。

(1) 行列 B の余因子行列を求めよ。

(2) B が正則であるための b の条件を求めよ。さらに B が正則であるとき、 B の逆行列を求めよ。

III 次の問い合わせにおいて V は \mathbb{R} 上のベクトル空間、 $f : V \rightarrow V$ は線形写像とする。

(1) ベクトル空間 V の次元 $\dim(V)$ の定義を述べよ。

(2) v_1, \dots, v_n をベクトル空間 V のベクトルとする。このとき、 $f(v_1), \dots, f(v_n)$ が 1 次独立であるならば、 v_1, \dots, v_n は 1 次独立であることを示せ。

(3) 不等式 $\dim(V) \leq \dim(f(V)) + \dim(\text{Ker } f)$ を示せ。ただし、 $\text{Ker } f$ は f の核である。

問題 2. (この問題の解答は問題 2(1 枚目)に記入すること。)

1. 関数 $f(x) = \arcsin x$ ($-1 < x < 1, -\pi/2 < y < \pi/2$) に関する次の問い合わせに答えよ。

(1) 逆関数の微分法を用いて $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を証明せよ。

(2) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(3) $f^{(n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次導関数とする。ただし $f^{(0)}(x) = f(x)$ である。このとき、0 以上の整数 n に対し、

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (1+2n)xf^{(n+1)}(x) - n^2f^{(n)}(x) = 0$$

が成り立つことを証明せよ。

(4) $f(x) = \arcsin x$ のマクローリン展開を 5 次の項まで求めよ。

2. (この問題の解答は問題 2(2 枚目)に記入すること。)

$D = \{(x, y) : 5x^2 - 6xy + 5y^2 \leq 4, y \geq x\}$ とする。

(1) 変数変換 $x = u - \frac{v}{2}, y = u + \frac{v}{2}$ を考える。この変換により、 D にうつされる

(u, v) 平面の領域を求めよ。

(2) $\iint_D \exp\left(\frac{5x^2 - 6xy + 5y^2}{4}\right) dx dy$ の値を求めよ。ただし $\exp(x) = e^x$ である。