平成２８年度

島根大学大学院総合理工学研究科博士前期課程

総合理工学専攻

（物理・材料科学コース）

入試問題（第１次）

【 物理学 】

注　意

1　問題紙は，指示があるまで開いてはならない。

2　問題紙　８ページ，解答用紙　１３枚である。

指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。

3　解答は，解答用紙に清書すること。

4　問題１から４までの４問は必須問題とする。問題５と６は選択問題とし，いずれか１問を選んで解答すること。また，選択した問題の解答用紙には所定欄に○を記入すること。

5　解答用紙はすべて回収するので持ち帰らないこと。

6　問題紙は，持ち帰ること。

総合理工学専攻
（物理・材料科学コース）　物理学　問題

$\boxed{1}$

図 1 のように，半径 a，質量 m，および，半径 $2a$，質量 $4m$ の密度が一様な 2 つの剛体円柱を一体とした滑車がある。滑車の回転軸を水平にして，2 つの円柱部の周囲にそれぞれ反対方向に質量が無視できる糸をまきつけ，一方の糸の下端に質量 $\frac{m}{2}$ のおもり，他方の糸の下端に質量が無視できるバネ定数 k のバネをつけた。さらに，図 2 のようにバネの下端を床に固定して，滑車を動かしてつりあいの位置で静止させたとする。回転軸の摩擦は無視でき，糸は円柱上をすべらず，伸びないものとし，重力加速度を g として以下の問いに答えよ。

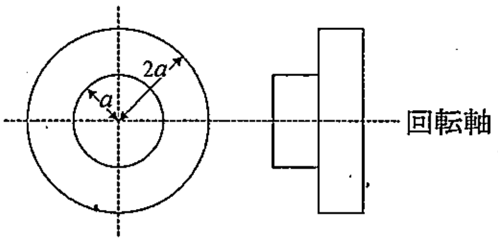


図 1

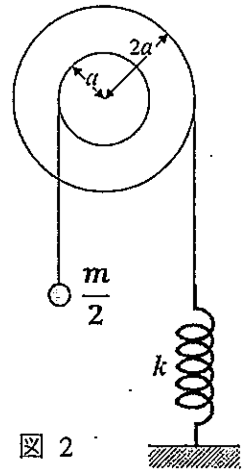


図 2

(1) つりあいの位置でのバネの自然長からの伸び s を求めよ。

次に，おもりをわずかに鉛直方向に変位させ，静かに手をはなし，上下に振動させる運動を考える。図 3 のように，おもりのつりあいの位置を原点とし，鉛直下向きが正となるようにおもりの変位 x をとる。また，それぞれの糸の張力を T_1，T_2，滑車のつり合いの位置からの回転角を θ として以下の問いに答えよ。

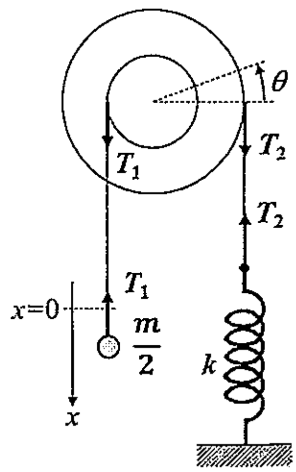


図 3

(2) おもりの運動方程式（x についての微分方程式）を m, g, T_1 を用いて示せ。

(3) 滑車の慣性モーメントが $I = \dfrac{17ma^2}{2}$ となることを示せ。

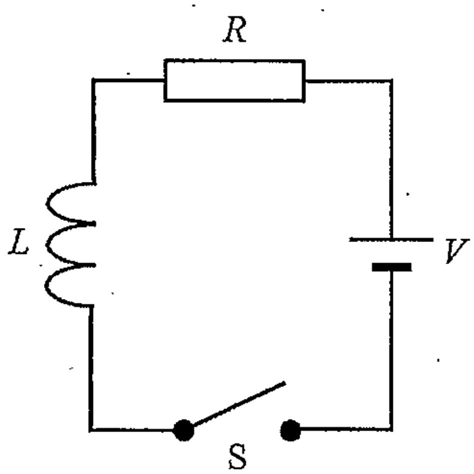
(4) 滑車の回転の運動方程式（θ についての微分方程式）を I，a，T_1，T_2 を用いて示せ。

(5) T_2 を m，g，k，x を用いて示せ。

(6) 前問までの結果，および $a\theta = x$ の関係から，振動の周期 T を m, k を用いて求めよ。

$\boxed{2}$

図のように，自己インダクタンス L のコイル，電気抵抗 R，起電力 V の電池からなる RL 直列回路がある。このような回路では，スイッチを入れても電流はすぐに一定値にならず，時間をかけて一定値に近づく。時刻 $t=0$ で図の回路のスイッチ S を入れた場合を考え，以下の問いに答えよ。



(1) 回路を流れる電流 I が時間 t に対して変化すると，コイルを貫く磁束 Φ も時間変化する。Φ の時間変化によりコイルに生じる誘導起電力 V_i はどのように表されるか式で示せ。

(2) (1)の結果で $\Phi = LI$ とおき，V, R, L, I の間に成り立つ関係式（回路方程式）を求めよ。

(3) (2)の方程式を解き，回路を流れる電流 $I(t)$ を求めよ。また，横軸を t，縦軸を $I(t)$ とするグラフを描き，$t \to \infty$ の場合に $I(t) \to V/R$ となることを示せ。

(4) 時刻 t においてコイルが消費する電力 P_L を R, V, L, t を用いて表せ。

(5) スイッチを入れてから定常状態になるまでにコイルが消費したエネルギー W_L を求めよ。

3

固体の格子振動として，同一の固有角振動数 ω をもつ $3N$ 個の調和振動子からなる系を考える。調和振動子は互いに独立しており，この系の温度を T，ボルツマン定数を k_B として，以下の問いに答えよ。必要であれば，$\sinh(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$，$\cosh(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$，$e^{-A}<1$ のとき $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-An}=\dfrac{1}{1-e^{-A}}$，$\beta=\dfrac{1}{k_B T}$ を用いてよい。

(1) 1つの調和振動子のエネルギー準位は，量子力学的には，$\hbar\omega\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ で与えられる。この調和振動子の分配関数 Z_1 が，$Z_1=\dfrac{1}{2\sinh\left(\dfrac{\hbar\omega}{2k_B T}\right)}$ となることを示せ。

(2) (1)で求めた Z_1 を用いて，$3N$ 個の調和振動子からなる系の分配関数 Z を求めよ。

(3) (2)で求めた Z を用いて，内部エネルギー U が，$U=3N\left(\dfrac{\hbar\omega}{2}\right)\left[\dfrac{\exp\left(\dfrac{\hbar\omega}{k_B T}\right)+1}{\exp\left(\dfrac{\hbar\omega}{k_B T}\right)-1}\right]$ となることを示せ。

(4) 内部エネルギー U を温度 T で微分することにより，格子振動による比熱 C を求めよ。

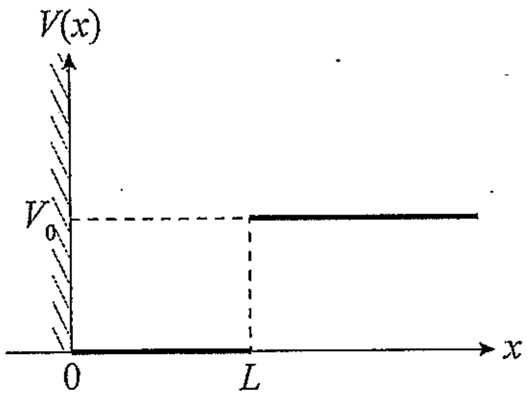
(5) (4)で求めた格子比熱 C の低温極限 $(T\to 0)$ および高温極限 $(T\to\infty)$ での値を求めよ。横軸を $\dfrac{k_B T}{\hbar\omega}$ として，格子比熱 C の温度依存性のグラフを図示せよ。

4

1 次元 x 軸上の $x \geq 0$ の領域で，次の $V(x)$ で表されるポテンシャル中で運動する質量 m の粒子を考える。

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq L) \\ V_0 & (x > L) \end{cases}$$

$x < 0$ では，$V(x) \to +\infty$ で，粒子は存在しない。粒子のエネルギーを E として，$0 < E < V_0$ の条件の下で，以下の問いに答えよ。



(1) $0 \leq x \leq L$ の領域の波動関数を $\phi_{\text{in}}(x)$ として，$\phi_{\text{in}}(x)$ についての Schrödinger 方程式を書き，その一般解を求めよ（任意定数は各自で与えること）。$k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar > 0$ で定義される k を用いてよい。

(2) (1)の一般解について，$x = 0$ での $\phi_{\text{in}}(x)$ についての境界条件を示し，その境界条件を用いて，$\phi_{\text{in}}(x)$ を<u>三角関数</u>で表せ（改めて任意定数を与えてもよい）。

(3) $x > L$ の領域の波動関数を $\phi_{\text{out}}(x)$ として，$\phi_{\text{out}}(x)$ についての Schrödinger 方程式を書き，その一般解を求めよ（任意定数は各自で与えること）。$K \equiv \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar > 0$ で定義される K を用いてよい。

(4) (3)の一般解について，$x \to +\infty$ での $\phi_{\text{out}}(x)$ の振る舞いに注意して，任意定数に課される条件を求め，その条件の下での $\phi_{\text{out}}(x)$ を示せ。

(5) $x = L$ での $\phi_{\text{in}}(x)$ と $\phi_{\text{out}}(x)$ が満たすべき条件（接続条件）を示し，その条件を用いて(2)や(4)に現れる任意定数を消去することで，k と K の間に，

$$K = -\frac{k}{\tan(kL)}$$

の関係式が成り立つことを示せ。

(6) (5)で示した関係式の両辺にLを掛けることで，$\xi \equiv kL$と$\eta \equiv KL$で定義される無次元変数ξとηの関係式

$$\eta = -\frac{\xi}{\tan\xi}$$

を得る。一方，$k^2 + K^2 = 2mE/\hbar^2 + 2m(V_0 - E)/\hbar^2 = 2mV_0/\hbar^2$より，

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{2mV_0 L^2}{\hbar^2} \equiv \rho^2$$

という関係式を得る（ρは上式でV_0から決まる無次元定数）。ξ-η平面の第一象限に，典型的なρを与えた時の，これら二つの関係式を表すグラフの概形を描き，そのグラフからエネルギー固有値を求める方法を簡潔に説明せよ。

(7) (6)の結果から，V_0には，エネルギー固有値が存在するために必要な最小値があることがわかる。どのようにしてそれがわかるかを簡潔に説明し，V_0の最小値を求めよ。

5

金属中の伝導電子を，相互作用のないスピン $S=1/2$ のフェルミ粒子として，以下の問いに答えよ。

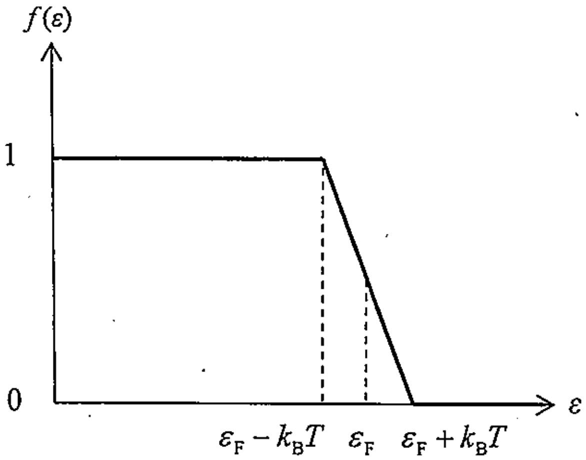
(1) フェルミ粒子のパウリの排他原理について簡潔に説明せよ。

(2) 全電子数 N を，電子のスピン当たりの状態密度 $D(\varepsilon)$，フェルミ分布関数 $f(\varepsilon)$ を用いた式で表せ。また，状態密度の物理的な意味を説明せよ。

(3) 通常金属の伝導電子のフェルミ・エネルギー ε_F を温度に換算すると，どの程度の温度となるか答えよ。

(4) 室温（Tとせよ）では，フェルミ面近傍の電子が ε_F 以上へ熱励起される。そこで，室温のフェルミ分布関数 $f(\varepsilon)$ が，下図のように，フェルミ・エネルギー近傍で直線的に変化すると近似するとき，伝導電子の内部エネルギーの増分はいくらか求めよ。ただし，フェルミ分布関数の室温での化学ポテンシャルは ε_F と一致しており，$\varepsilon_\mathrm{F}-k_\mathrm{B}T\leq\varepsilon\leq\varepsilon_\mathrm{F}+k_\mathrm{B}T$ の範囲では，状態密度 $D(\varepsilon)=D$（一定）として計算せよ。

(5) 内部エネルギーの増分を温度で微分することにより，電子比熱を求めよ。

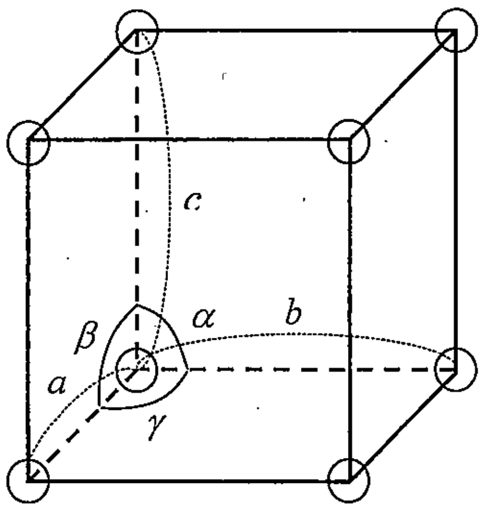


6

結晶性固体の物性を明らかにするためにはその物質の結晶構造を知ることは非常に重要である。結晶構造に関する以下の問いに答えよ。

(1) 結晶は単位胞と呼ばれる結晶格子の最小単位で記述できる。この単位胞は回転対称性により7種類の結晶系（立方晶，正方晶，斜方晶，単斜晶，三斜晶，六方晶，三方晶）に分類される。この立方晶以外の6種類の結晶系の単純単位胞を下の解答例にならって解答せよ。

【解答例】　立方晶の場合



$a=b=c,\quad \alpha=\beta=\gamma=90^\circ$

(2) 立方晶の(100)面，(210)面，(111)面を図示せよ。

(3) 立方晶における「格子定数(a, b, c)」と「ミラー指数(hkl)をもつ面間距離d_{hkl}」との関係を導け。

(4) 結晶にX線を入射した場合に観測される回折線は，結晶中に存在する様々なミラー指数をもつ結晶面間の干渉によるものである。ただし，必ずしも全ての結晶面由来の回折線が観測されるとは限らない。このような規則性のことを消滅則と呼ぶ。立方晶系について，単純立方格子，体心立方格子，面心立方格子，それぞれの格子の消滅則を示せ。

(5) 結晶構造が面心立方格子である物質の粉末X線回折パターンを測定すると，回折角 2θ $= 38.2^\circ, 44.4^\circ, 64.6^\circ, 77.6^\circ, 81.8^\circ, 98.4^\circ$ の位置に回折線が観測された。これらの反射に対する指数(hkl)はいくらか。面心立方格子に消滅則が成り立つのであれば，それを考慮して解答せよ。ただし，用いたX線の波長は 0.15 nm，格子定数は 0.40 nm とする。

※正弦関数は以下の表に記載された値を必要に応じて使用してよい。

θ(°)	$\sin\theta$
19.1	0.33
22.2	0.38
32.3	0.53
38.8	0.63
40.9	0.65
49.2	0.76