平成２８年度

島根大学大学院総合理工学研究科博士前期課程

総合理工学専攻

（数理科学コース）

入試問題（第１次）

【数　学】

注　意

1　問題紙は，指示があるまで開いてはならない。

2　問題紙 ３ページ，解答用紙 ３枚，下書き用紙 １枚である。
指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。

3　解答は，解答用紙に清書すること。

4　問題紙と下書き用紙は，持ち帰ること。

平成28年度　総合理工学専攻
数理科学コース学力検査問題（必修）

次の2問をすべて解答せよ。

$\boxed{1}$ A を n 次直交行列とする。次の問いに答えよ。ただし，m 行 n 列行列を (m,n) 型行列とよぶこととし，$O_{m,n}$ を (m,n) 型零行列，E を n 次単位行列とする。

(1) A の行列式の値は 1 または -1 であることを示せ。

(2) $\lambda \in \mathbb{C}$ を A の固有値とするとき，$|\lambda| = 1$ を示せ。

(3) A の行列式の値が -1 のとき，A は -1 を固有値にもつことを示せ。

(4) s は $1 \leqq s \leqq n-1$ をみたす整数とする。階数 s の (n,s) 型行列 P と階数 $n-s$ の $(n,n-s)$ 型行列 Q が存在して，$(A+E)P = O_{n,s}$ かつ $(A-E)Q = O_{n,n-s}$ が成り立つとき，行列 A のすべての固有値とそれぞれの固有空間の次元を求めよ。

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。

(1) A と B を正の定数とするとき，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{A+Bt^2}$ を求めよ。

(2) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ $(0 \leqq x < \pi)$ とおくとき，$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ を示せ。

(3) 実数 a, b が $0 < b < a$ をみたすとき，積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{a+b\cos x}$ を計算せよ。

(4) 積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x+\sin x}$ を計算せよ。

平成28年度　総合理工学専攻
数理科学コース学力検査問題（選択）

以下の5問から1問を選択し，解答せよ。

$\boxed{3}$ G を有限群し，G の単位元を e とする。また，有限集合 S の元の個数を $|S|$ で表す。このとき，次の問いに答えよ。

(1) H, K を G の部分群とする。

(i) G の任意の元 g に対して，$g^{-1}Hg$ は G の部分群であることを示せ。また，$|g^{-1}Hg| = |H|$ であることを示せ。

(ii) $H \cap K$ は H の部分群であることを示せ。とくに，K が G の正規部分群ならば，$H \cap K$ は H の正規部分群であることを示せ。

(iii) $H \cap K = \{e\}$ とする。このとき H の元 h, h' と K の元 k, k' に対して，$hk = h'k'$ ならば，$h = h'$ かつ $k = k'$ であることを示せ。また，$HK = \{hk \mid h \in H,\ k \in K\}$ とするとき，$|HK| = |H|\,|K|$ であることを示せ。

(2) G の位数を pq（ただし p, q は異なる素数で $p < q$）とする。また，H を G の位数 q の部分群とする。

(i) H の部分群は $\{e\}$ と H のみであることを示せ。

(ii) H は G の正規部分群であることを示せ。

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ。

(1) M を m 次元 C^∞ 級多様体，$\mathfrak{X}(M)$ を M 上の C^∞ 級ベクトル場全体からなる $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする。$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ を，M 上の C^∞ 級関数 f に，$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$ と作用するものとして定める。$[X, Y]$ を X と Y のかっこ積とよぶ。このとき，$\mathfrak{X}(M)$ はかっこ積によってリー環になること，すなわち，任意の $\mathfrak{X}(M)$ の元 X, Y, Z に対して次が成り立つことを示せ。

(i) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z] \quad (a, b \in \mathbb{R}).$

(ii) $[X, Y] = -[Y, X].$

(iii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$

(2) $\mathbb{R}^3$ 上のどの点においても 0 とならない C^∞ 級関数 f に対して，次の3つの $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場を考える。

$$f(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial}{\partial x_1},\ f(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial}{\partial x_2},\ f(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

これらのベクトル場のうちのどの2つも互いに可換であるための必要十分条件を求めよ。ただし，ベクトル場 X と Y が可換であるとは $[X, Y] = 0$ となるときをいう。

$\boxed{5}$ $\mathbb{R}$ を実数全体からなる集合，d を $\mathbb{R}$ 上の通常の距離とする。また，$\mathbb{R}$ 上の新しい距離 ρ を，$x, y \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\rho(x,y) = \begin{cases} |x| + |y| & (x \neq y \text{ のとき}) \\ 0 & (x = y \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する。このとき，次の問いに答えよ。

(1) ρ は $\mathbb{R}$ 上の距離であることを確かめよ。

(2) 任意の $a \in \mathbb{R}$，$\delta > 0$ に対して，$U_\rho(a,\delta) = \{r \in \mathbb{R} \mid \rho(a,r) < \delta\}$ とおく。このとき，任意の $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して，$U_\rho(x,|x|) = \{x\}$ となることを示せ。

(3) $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とする。写像 $f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, \rho)$ を $f(x) = ax$ によって定めるとき，f は $x = 0$ においてのみ連続であることを示せ。

$\boxed{6}$ 2 変数関数

$$f(x,y) = C\exp\left(-\left(\frac{x-1}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{y+1}{\beta}\right)^2\right)$$

を考える。ただし，$\exp x$ は指数関数 e^x，C，α，β はすべて正の実数である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(x,y)$ のヘッセ行列 $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$ を求めよ。

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ。

(3) 等式 $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1$ をみたす C を α，β を用いて表せ。ここで，$\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いてよい。

$\boxed{7}$ 次の問いに答えよ。

(1) $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ならば，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = 0$$

であることを証明せよ。

(2) $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ならば，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n}{1 + 2 + 3 + \cdots + n} = 0$$

であることを証明せよ。