平成２８年度編入学者選抜試験【一般選抜】問題

数　学

（総合理工学部 数理・情報システム学科 数理系）

注　意

1　問題紙は指示があるまで開いてはいけない。

2　問題紙は２ページである。解答用紙は４枚である。指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。

3　答えはすべて解答用紙の所定のところに記入すること。

4　解答用紙は持ち帰ってはいけない。

5　試験終了後，問題紙は持ち帰ること。

平成28年度編入試験問題

問題 1.

1. (この問題の解答は $\boxed{\text{問題 1(1 枚目)}}$ に記入すること。)

1.1. 3次実列ベクトル全体からなるベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の4つのベクトルを

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \ a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \ a_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

とする。このとき,

(1) a_1, a_2, a_3 は1次独立であることを示せ。

(2) a_4 を a_1, a_2, a_3 の1次結合で表せ。

1.2. 実数上のベクトル空間 V の基底を v_1, v_2, v_3 とする。線形写像 $f : V \to V$ が次をみたすとする:

$$\begin{cases} f(v_1) = v_1 + 2v_2 + v_3 \\ f(v_2) = 2v_1 + v_2 + v_3 \\ f(v_3) = 4v_1 + 2v_2 + 2v_3 \end{cases}$$

このとき,

(3) f の像 $f(V)$ の次元を求めよ。

(4) $f(W) = W$ をみたす V の 1次元の部分空間 W をすべて求めよ。

2. (この問題の解答は $\boxed{\text{問題 1(2 枚目)}}$ に記入すること。)

4次実正方行列 B のすべての固有値は0であるとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) B^4 は零行列であることを示せ。

4次実列ベクトル全体からなるベクトル空間を $\mathbb{R}^4$ とする。$c \in \mathbb{R}^4$ は $B^3c \neq 0$ をみたすとし，$P = [c\ Bc\ B^2c\ B^3c]$ を c, Bc, B^2c, B^3c をそれぞれ第1，第2，第3，第4列にもつ4次実正方行列とする。

(2) c, Bc, B^2c, B^3c は $\mathbb{R}^4$ の基底であることを示せ。

(3) P は正則行列であることを示し，$P^{-1}BP$ を求めよ。

問題 2. (この問題の解答は$\boxed{\text{問題 2(1 枚目)}}$に記入すること。)

1. 自然数 $n = 1, 2, \ldots$ に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = n^2 x^{n+1} \log x \quad (x > 0)$$

と定める。次の問いに答えよ。

(1) $f_n(x)$ の最小値を求めよ。

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx$ を計算せよ。

(3) $0 < x \leq 1$ をみたす各 x に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ。さらに $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とするとき，次の等式が成り立つかどうかを調べよ。

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx.$$

2. (この問題の解答は$\boxed{\text{問題 2(2 枚目)}}$に記入すること。)

(1) $R > 0$ とする。$\Omega(R) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2,\ 0 \leq y \leq x\}$ とするとき，重積分 $\displaystyle\iint_{\Omega(R)} \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2} dxdy$ を計算せよ。

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_0^R \left(\int_0^x \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2} dy \right) dx$ を求めよ。

(3) α を定数とし，$(x, y) \neq (0, 0)$ に対して $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\alpha/2}$ と定める。$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ。