平成28年度入試【推薦入試Ⅰ】

小　論　文

〔数 理〕

（総合理工学部　数理・情報システム学科）

注　意

1　問題紙は指示があるまで開いてはいけない。

2　問題紙は2ページ，解答用紙は4枚である。指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。

3　解答はすべて解答用紙の所定のところに記入すること。

4　問題紙及び解答用紙は持ち帰ってはいけない。

問題 1

次の問いに答えよ。

(1) 複素数平面上で，0でない複素数 z_1，z_2 の極形式を

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

とする。次が成り立つことを示せ。

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

(2) $a > 0, b > 0$ のとき，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ を示せ。さらに等号が成立する条件を求めよ。

(3) 三角関数の加法定理を用いて，$\sin(a+b) - \sin a = 2\cos\left(a + \dfrac{b}{2}\right)\sin\dfrac{b}{2}$ を示せ。

問題 2 s を実数，t を正の数とし，平面上の三角形 $\triangle\mathrm{ABC}$ は $\mathrm{AB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}t$, $\mathrm{AC} = 2$ および $\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$ を満たすものとする。点 P, Q を

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (s-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

を満たすようにとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を求めよ。

(2) $t = 1$ のとき，$\angle\mathrm{PAQ} = 90^\circ$ となるための s の値を求めよ。

(3) $\angle\mathrm{PAQ} < 90^\circ$ がすべての s に対して成り立つような t の範囲を求めよ。

問題 3　次の問いに答えよ。

(1) 微分可能な 2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積で表される関数 $f(x)g(x)$ は微分可能で，その導関数が次の等式を満たすことを導関数の定義にしたがって示せ。

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(2) 微分可能な 3 つの関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ の積で表される関数 $f(x)g(x)h(x)$ の導関数が次の等式を満たすことを示せ。

$$\{f(x)g(x)h(x)\}' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

(3) 導関数の定義にしたがって $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ を微分せよ。

問題 4　$f(x) = \dfrac{(\log x)^2}{x}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ。

(2) $x > 1$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。

(3) $x > 1$ における曲線 $y = f(x)$ の凹凸を調べよ。