

平成29年度入試

個別学力試験問題（後期日程）

数 学

(数理・情報システム学科)

注 意

1. 問題紙は指示があるまで開いてはいけません。
2. 問題紙は2ページ、解答用紙は4枚です。指示があつてから確認し、解答用紙の所定の欄に受験番号を記入してください。
3. 答えはすべて解答用紙の所定のところに記入してください。
4. 解答用紙の裏面は使わないでください。
5. 各問題とも必ず解答の過程を書き、結論を明示してください。
小間に分けられているときは、小間の結論を明示してください。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけません。
7. 試験終了後、問題紙は持ち帰ってください。

1 0 $\leqq \theta \leqq \pi$ とし,

$$A(\sin \theta \cos^2 \theta, \sin^2 \theta, -\sin^2 \theta \cos \theta), \quad B(|\cos \theta| \cos \theta, 0, -|\cos \theta| \sin \theta)$$

をそれぞれ座標空間の点とする。 $t = \sin \theta$ とするとき、次の問い合わせに答えよ。ただし、O は原点を表す。

- (1) $|\overrightarrow{OA}|^2, |\overrightarrow{OB}|^2$ をそれぞれ t を用いて表せ。
- (2) $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき、内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ を t を用いて表せ。また、 t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ における $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ の最大値と最小値を求めよ。
- (4) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ における $|\overrightarrow{AB}|^2$ の最大値と最小値を求めよ。

2 次の問い合わせに答えよ。

- (1) 2 次方程式 $a^2 + 7a + 7 = 0$ の解をすべて求めよ。
- (2) 方程式 $x^2 - y^2 = 4$ をみたす整数の組 (x, y) をすべて求めよ。
- (3) $\sqrt{n^2 - 4n}$ が整数となるような整数 n をすべて求めよ。
- (4) 等式 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{n}{\alpha + \beta}$ をみたす自然数 α, β が存在するような整数 n をすべて求めよ。

3 整数 n に対して複素数 z_n を

$$z_n = \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^n + \left(\frac{\sqrt{3} - i}{2} \right)^n$$

により定める。ただし、 i は虚数単位とする。次の問い合わせに答えよ。

- (1) $\sqrt{3} - i$ を極形式で表せ。ただし、偏角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。
- (2) すべての整数 n に対して $z_{n+12} = z_n$ であることを示せ。
- (3) 0 以上 11 以下の整数 n で z_n が実数となるものをすべて求めよ。
- (4) 複素数平面上の 3 点 z_{-1}, z_4, z_5 が一直線上にあるかないかを答え、その理由を述べよ。

4 関数 $f(x) = xe^{1-x}$ を考える。次の問い合わせに答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

- (1) 関数 $f(x)$ の増減を調べ、極値を求めよ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分の面積を求めよ。
- (3) $a_1 = \alpha$ とし、数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。ただし、 $0 < \alpha \leq 1$ とする。すべての自然数 n において、 $a_n \leq a_{n+1}$ が成立することを示せ。