平成２９年度

島根大学大学院総合理工学研究科博士前期課程

総合理工学専攻

（数理科学コース）

入試問題（第１次）

【数　　学】

注　意

1　問題紙は，指示があるまで開いてはならない。

2　問題紙　４ページ，解答用紙　３枚，下書き用紙　１枚である。

指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。

3　解答は，解答用紙に清書すること。

4　問題紙と下書き用紙は，持ち帰ること。

平成 29 年度　総合理工学専攻
数理科学コース学力検査問題（必修）

次の 2 問をすべて解答せよ。

$\boxed{1}$ 0 と異なる実数 a, b に対し, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & b & 1 \\ b & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) A の固有値を求めよ。

(2) A は対角化可能かどうか理由をつけて答えよ。

(3) A のジョルダン標準形を求めよ。 ただし, $P^{-1}AP$ がジョルダン標準形になるような正則行列 P は求めなくてもよい。

(4) 線形変換 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を $f(x) = Ax$ $(x \in \mathbb{R}^4)$ によって定め, 自然数 n に対し, $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{個}}$ を f の n 回合成写像とする。 f^n の像 $\mathrm{Im}(f^n)$ と f^n の核 $\mathrm{Ker}(f^n)$ の次元をそれぞれ求めよ。

$\boxed{2}$ 負でない整数 n に対して, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x \, dx$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $\tan x$ の導関数を求めよ。

(2) $I_{n+1} + I_n$ を求めよ。

(3) I_1 と I_2 を求めよ。

(4) $f_n(x) = \tan^n x$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ とおく。任意の δ $(0 < \delta < \frac{\pi}{4})$ に対して $f_n(x)$ は区間 $[0, \delta]$ 上定数関数 $f(x) = 0$ に一様収束することを示せ。

(5) 次の等式を示せ。

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$$

平成 29 年度　総合理工学専攻
数理科学コース学力検査問題（選択）

以下の 5 問から 1 問を選択し，解答せよ。

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ。

[1] G, G' を群とし，$f : G \to G'$ を全射準同型写像とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) H' を G' の部分群とすると，$f^{-1}(H') = \{x \in G \mid f(x) \in H'\}$ は G の部分群であり，$\mathrm{Ker}\,(f)$ を含むことを示せ。

(2) H を G の部分群とすると，$f(H) = \{f(x) \mid x \in H\}$ は G' の部分群であることを示せ。とくに H が G の正規部分群であるなら，$f(H)$ は G' の正規部分群であることを示せ。

[2] $\mathbb{Z}$ を整数全体が加法に関してつくる群，G' を元 a で生成された位数 360 の巡回群とする。準同型写像 $f : \mathbb{Z} \to G'$ を $f(n) = a^n$ によって定義する。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{Ker}\,(f)$ を求めよ。

(2) 54 の倍数からなる $\mathbb{Z}$ の部分群 $H = 54\mathbb{Z}$ に対して $f(H)$ の位数を求めよ。

$\boxed{4}$ 等温座標系でパラメーター表示される $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 $p(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ を考える。ここで，(u,v) が等温座標系であるとは，第一基本量

$$E = p_u \cdot p_u,\ F = p_u \cdot p_v,\ G = p_v \cdot p_v$$

が $E = G,\ F = 0$ をみたすことである。$e = \dfrac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|}$ とし，

$$L = p_{uu} \cdot e = -p_u \cdot e_u,\ M = p_{uv} \cdot e = -p_u \cdot e_v,\ N = p_{vv} \cdot e = -p_v \cdot e_v$$

を第二基本量とする。次の問いに答えよ。

(1) Δp は接平面に垂直であることを示せ。ただし，$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial v^2}$ である。

(2) $\Delta p \cdot e$ を E と H を用いて表せ。ただし，H は平均曲率とする。

(3) 曲面 $p(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ が極小曲面であるための必要十分条件は $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ が調和関数となることである。このことを示せ。

(4) $\mathbb{R}^3$ 内に境界のないコンパクトな極小曲面は存在しないことを示せ。ただし，曲面上の任意の点の近傍で等温座標系が存在することを認めてよい。

$\boxed{5}$ (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とし，$\mathbb{R}^n$ を n 次元ユークリッド空間とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 次の条件 (♯) をみたす写像 $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ をリプシッツ写像という。

(♯) ある $L \geq 0$ が存在して，任意の $x, y \in X$ に対して，

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y).$$

リプシッツ写像 f は連続写像であることを示せ。

(2) 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ を $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ によって定義する。このとき，f はリプシッツ写像であることを示せ。

(3) 次の条件 (♭) をみたす写像 $g : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ を双リプシッツ写像という。

(♭) ある $K, L > 0$ が存在して，任意の $x, y \in X$ に対して，

$$K d_X(x, y) \leq d_Y(g(x), g(y)) \leq L d_X(x, y).$$

全射である双リプシッツ写像 g は同相写像であることを示せ。

(4) $A = [1, \infty)$ を $\mathbb{R}^1$ の部分距離空間とし，写像 $g : A \to A$ を $g(x) = \sqrt{x}$ で定める。このとき，g はリプシッツ写像であるが，双リプシッツ写像ではないことを示せ。

$\boxed{6}$ 領域 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}$ において点 $(0, 0)$ を除いて定義された関数

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + x^3 + y^2}$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1) n を 2 以上の自然数として，極限 $\alpha = \lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ の値を求めよ。

問 (1) で求めた α に対して $f(0, 0) = \alpha$ とおく。

(2) $f(x, y)$ の点 $(0, 0)$ における連続性について調べよ。

(3) $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ において x と y について偏微分可能であるかどうかを調べよ。

$\boxed{7}$ 次の問いに答えよ。

(1) 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合 A が下に有界であるとはどういうことか。その定義を述べよ。

(2) 集合 $A = \left\{ \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} : m \text{ と } n \text{ は自然数} \right\}$ が下に有界であることを示し，その下限を求めよ。さらにその下限は A の最小数であるかどうかを答えよ。

(3) $x_1 > y_1 > 0$ をみたす x_1 と y_1 を初項にもつ数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

によって定める。このとき，次の問いに答えよ。

(i) すべての自然数 n について，不等式 $x_n \geq y_n$, $x_n \geq x_{n+1}$ および

$$x_{n+1} - y_{n+1} \leq \frac{x_n - y_n}{2}$$

が成り立つことを示せ。

(ii) $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ の極限が存在して，それらが一致することを示せ。