

平成29年度

島根大学大学院総合理工学研究科博士前期課程

総合理工学専攻

(数理科学コース)

入試問題 (第2次)

【数 学】

注 意

- 1 問題紙は、指示があるまで開いてはならない。
- 2 問題紙 2 ページ，解答用紙 3 枚，下書き用紙 1 枚である。
指示があつてから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
- 3 解答は，解答用紙に清書すること。
- 4 問題紙と下書き用紙は，持ち帰ること。

平成29年度 総合理工学専攻
数理科学コース学力検査問題（選択）

問題訂正

3の2.

誤 ここで、 $b_n = \sum_{j=1}^n (b_j - b_{j-1}) + b_1$ が成り立つことを用いてよい。

正 ここで、 $b_n = \sum_{j=2}^n (b_j - b_{j-1}) + b_1$ が成り立つことを用いてよい。

平成29年度 総合理工学専攻
数理科学コース学力検査問題 (必修)

次の2問をすべて解答せよ。

- 1 V を \mathbb{R} 上の3次元ベクトル空間とし、 $\{v_1, v_2, v_3\}$ を V の基底とする。また w_1, w_2, w_3 を次のように定める。

$$w_1 = -v_1 + 4v_2 - 2v_3$$

$$w_2 = v_1 - v_2 + v_3$$

$$w_3 = 2v_1 - 4v_2 + 3v_3$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\{w_1, w_2, w_3\}$ は V の基底であることを示せ。
(2) v_1, v_2 で生成された V の部分空間を U とし、 w_1, w_2 で生成された V の部分空間を W とする。
(i) $U \cap W$ の次元を求めよ。
(ii) $V = U + W$ であることを示せ。
(3) 線形写像 $f: V \rightarrow V$ を $f(v_i) = w_i$ ($i = 1, 2, 3$) により定める。
(i) V の基底 $\{w_1, w_2, w_3\}$ に関する f の表現行列を求めよ。
(ii) f の固有値をすべて求めよ。また、各固有値に対する f の固有ベクトルを w_1, w_2, w_3 の1次結合で表せ。

- 2 次の問いに答えよ。

- (1) 極限 $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x$ が収束することを示し、値を求めよ。
(2) 広義積分 $\int_0^1 \log x dx$ が収束することを示し、値を求めよ。
(3) 0以上の整数 m, n に対して

$$I(m, n) = \int_0^1 x^m (\log x)^n dx$$

とおくとき、広義積分は収束し

$$I(m, n+1) = -\frac{n+1}{m+1} I(m, n)$$

が成り立つことを示せ。

平成 29 年度 総合理工学専攻
数理科学コース学力検査問題 (選択)

以下の 2 問から 1 問を選択し、解答せよ。

3 次の問いに答えよ。

- (1) 実数列 $\{a_n\}$ が α に収束することを ϵ - N 論法を用いて説明せよ。
 (2) 実数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ に対し, $a_{n+1} - a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$), $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ および

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{a_n - a_{n-1}} = 0 \text{ が成り立てば,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$$

であることを示せ。ここで, $b_n = \sum_{j=1}^n (b_j - b_{j-1}) + b_1$ が成り立つことを用いてよい。

- (3) 次の極限値を求めよ。ただし、発散する場合は、発散すると答え、その理由を述べよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^1 + e^2 + e^3 + \dots + e^n}{1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + n^n}.$$

- (4) 次の極限値を求めよ。ただし、発散する場合は、発散すると答え、その理由を述べよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \dots + \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}.$$

4 \mathbb{R}^2 で定義された関数 $f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$ を考える。次の問いに答えよ。

- (1) $f(x, y)$ を 2 次の項までマクローリン展開せよ。
 (2) $f_x = f_y = 0$ となる点はただ 1 つで, $f(x, y)$ はそこで極大値をとることを示せ。
 (3) $|x| \leq 3, |y| \leq 3$ において, $f(x, y)$ は (2) で求めた極大値よりも大きな値をとることを示せ。
 (4) 領域 D が 3 つの直線 $x = 0, y = 0, y = -x + 2$ で囲まれる三角形のとき,
 $\iint_D f(x, y) dx dy$ を求めよ。