平成３０年度

島根大学大学院総合理工学研究科博士前期課程

総合理工学専攻

（物理・材料科学コース）

入試問題（第１次）

【 物理学 】

注　意

1　問題紙は，指示があるまで開いてはならない。

2　問題紙　８ページ，解答用紙　１２枚である。

指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。

3　解答は，解答用紙に清書すること。

4　問題１から４までの４問は必須問題とする。問題５と６は選択問題とし，いずれか１問を選んで解答すること。また，選択した問題の解答用紙には所定欄に○を記入すること。

5　解答用紙はすべて回収するので持ち帰らないこと。

6　問題紙は，持ち帰ること。

総合理工学専攻

（物理・材料科学コース）　物理学　問題

$\boxed{1}$

質量の無視できる長さ l の棒の両端の点 A, B にそれぞれ質量 m のおもりを取り付けた物体がある。この物体を点 B で回転できるように柱に固定し，図のように物体を水平の状態にしてから手をはなした。おもりを質点と考え，重力加速度は g として以下の問いに答えよ。

(1) A 点が最下点にきた時の A 点に取り付けられたおもりの速さ，および物体の重心の速さを m, l, g のうち必要なものを用いて表せ。

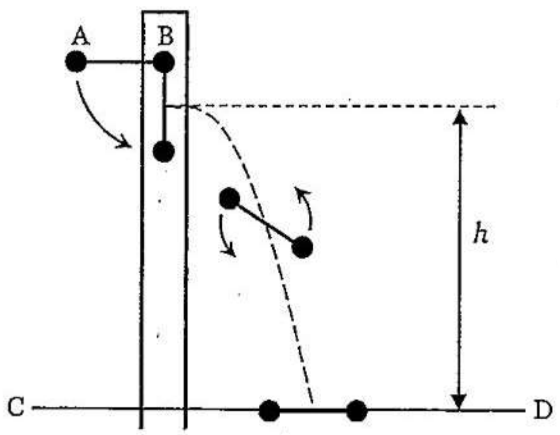
A 点が最下点にきた瞬間に点 B を柱から解放した。その後の物体の運動は重心の放物運動と重心のまわりの回転運動に分離して考えることができる。

(2) この物体の重心のまわりの慣性モーメント I を m, l, g のうち必要なものを用いて表せ。

(3) 回転運動の角速度 ω を m, l, g のうち必要なものを用いて表せ。

(4) その後，物体は高さ h だけ落下して重心がライン C-D 上を通過した。この瞬間に物体が水平になっているための m, l, h の条件を答えよ。

(5) 次に，点 B に取り付けたおもりの質量を n 分の 1 にし，上記と同様の手順で運動をさせた。この時，重心の速度が変化する一方で，回転運動の角速度は変化しないことを(1)-(3)と同様な計算をすることにより示し，その理由を述べよ。

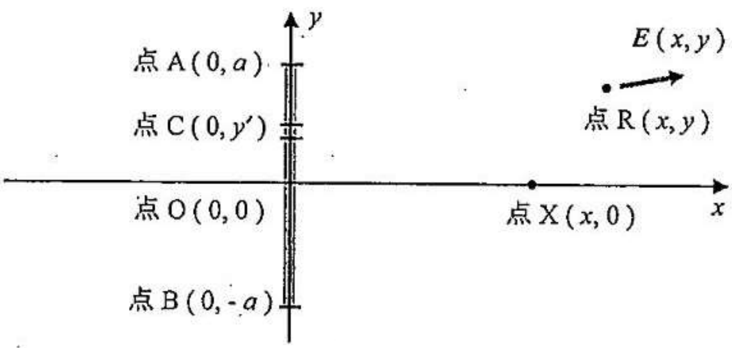


2

　xy－2次元平面上の点 A (0, a) および点 B (0, - a) で作られる線分 AB に電荷 Q ($Q>0$) を分割して配置し，その時に出来る電場を考える。真空の誘電率は ε_0 として以下の問いに答えよ。

I．電荷 Q を 2 等分し，点 A と点 B に置いた。
(1) 点 R (x, y) に電荷 q を置いた時，この電荷 q にかかるクーロン力 F (x, y)を求めよ。
(2) この時の電場 E (x, y) を求めよ。
(3) (2)で求めた電場 E (x, y) について，x 軸上のある点 X (x, 0) における電場の x 方向成分 E_x (x, 0) のグラフの概形を描け。

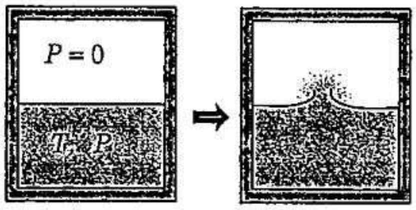
II．次に電荷 Q をさらに細かく均等に分割し，下図のように線分 AB 上に線電荷密度 $Q/2a$ で均一に分布させた。



(4) 線分 AB 上の任意の点 C (0, y') にある微小領域 dy' が点 R (x, y) につくる電場 dE (x, y) を求めよ。
(5) (4)で求めた電場 dE (x, y) より，x 軸上のある点 X (x, 0) における電場 E (x, 0) を求めよ。
(6) (5)で求めた電場 E (x, 0) の x 成分 E_x (x, 0) のグラフの概形を描け。

$\boxed{3}$

Ⅰ．図のように，断熱壁で囲まれた容器の内部を軽くて厚さの無視できる丈夫な膜で 2 つの空間に仕切った。まず，膜の下の空間に温度 T，圧力 P の理想気体を閉じ込め，上の空間を真空にした（始状態）。次に，この膜を静かに破ると，気体は仕事をすることなく膨張し（断熱自由膨張），最終的には容器内部全体を均質に占めた（終状態）。膜を破る前の下の空間の体積を V_0，容器内部の体積を V_1 として，以下の問いに答えよ。



(1) 内部エネルギー U の全微分形 $dU = TdS - PdV$ から次式を導け。

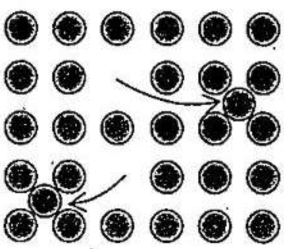
$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$$

(2) 上の式を理想気体に適用することによって，理想気体の内部エネルギーが温度 T のみに依存することを示せ。

(3) この過程において，始状態と比べて終状態の温度がどのように変化したか述べよ。

(4) 始状態と比べて終状態のエントロピー S がどのように変化したか述べよ。

Ⅱ．N 個の原子が規則正しく並んだ結晶がある。原子の並んだ格子点の間には原子が 1 個だけ入れる格子間隙が格子点の数 N と同程度の数 N' だけ存在する。原子を格子点から格子間隙に移すと右図のような Frenkel 型の格子欠陥が出来る。1 個の原子を格子点から格子間隙に移すのに要するエネルギーは $w(>0)$ である。また，欠陥の個数 n は N, N' と比べて非常に小さく，欠陥同士が近づくことは無いものとする。$w \gg k_B T$ が成り立つような低温領域での n の温度依存性を求めたい。以下の問いに答えよ。



(1) N 個の格子点から n 個の原子を取り去り，N' 個の格子間隙のどこかに配置する場合の数 W を求めよ。

(2) Stirling の公式 ($\log n! \simeq n\log n - n$) を用いてエントロピー S を求めよ。

(3) 欠陥により生じる内部エネルギーの増加分 $E = nw$ と前出の S とを用いて Helmholtz の自由エネルギー F を求めよ。

(4) 平衡状態では

$$\frac{\partial F}{\partial n} = 0$$

が成り立つことを用いて，温度 T における格子欠陥の数 n を求めよ。

4　3次元調和振動子のハミルトニアン

$$H_0 = -\frac{\hbar}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\frac{m\omega}{2}(x^2+y^2+z^2) = \hbar\omega\left(a_x a_x^\dagger + a_y a_y^\dagger + a_z a_z^\dagger + \frac{3}{2}\right)$$

に，λを定数，$V = xy$として，$H' = \lambda V$の摂動を加える。ここで，mは質量，ωは角振動数，$\hbar$はプランク定数である。また，a_α, $a_\alpha^\dagger$は以下で与えられる演算子である。

$$a_\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\alpha + \frac{i}{m\omega}p_\alpha\right),\ a_\alpha^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\alpha - \frac{i}{m\omega}p_\alpha\right),\ p_\alpha = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\alpha}\ \ (\alpha = x,y,z)$$

H_0の固有関数と固有値は以下のように与えられる。

$$\varphi_{n_x n_y n_z}(x,y,z) = u_{n_x}(x)u_{n_y}(y)u_{n_z}(z),\ E_{n_x n_y n_z} = \hbar\omega\left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right),$$
$$n_x, n_y, n_z = 0,1,2,\cdots,$$

ただし，$u_n(x)$は以下を満たす１次元調和振動子の固有関数である。

$$a_x u_n(x) = \sqrt{n}\,u_{n-1}(x),\ a_x^\dagger u_n(x) = \sqrt{n+1}\,u_{n+1}(x),\qquad (u_m, u_n) = \delta_{mn}$$

ここで，任意の関数$f(x)$，$g(x)$の内積は$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)dx$で与えられる。以上のことを踏まえて，以下の問いに答えよ。

(1)　x, yをa_x, $a_x^\dagger$, a_y, $a_y^\dagger$を用いて表せ。

(2)　上の結果を用いると

$$y\,\varphi_{n_x n_y n_z}(x,y,z) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n_y}\varphi_{n_x,n_y-1,n_z}(x,y,z) + \sqrt{n_y+1}\varphi_{n_x,n_y+1,n_z}(x,y,z)\right)$$

が得られる。同様にして$xy\,\varphi_{n_x n_y n_z}(x,y,z)$を求めよ。

(3)　$\left(\varphi_{n_x' n_y' n_z'}, V\varphi_{n_x n_y n_z}\right)$の内積を計算せよ。ここで，任意の関数$\psi(x,y,z)$，$\phi(x,y,z)$の内積は$(\psi,\phi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x,y,z)\phi(x,y,z)dxdydz$で与えられる。

(4)　第１励起状態の固有関数$\varphi_{001}(x,y,z)$，$\varphi_{010}(x,y,z)$，$\varphi_{100}(x,y,z)$に対して以下の行列を求めよ。

$$V = \begin{pmatrix} (\varphi_{100}, V\varphi_{100}) & (\varphi_{100}, V\varphi_{010}) & (\varphi_{100}, V\varphi_{001}) \\ (\varphi_{010}, V\varphi_{100}) & (\varphi_{010}, V\varphi_{010}) & (\varphi_{010}, V\varphi_{001}) \\ (\varphi_{001}, V\varphi_{100}) & (\varphi_{001}, V\varphi_{010}) & (\varphi_{001}, V\varphi_{001}) \end{pmatrix}$$

(5)　摂動$H' = \lambda V$により第１励起状態の固有値は３つに分裂する。これらの値をλの１次まで求めよ。

5

ある物質の電気抵抗率，キャリア密度，移動度を知るために，電気抵抗測定とホール効果測定を行い，物性に関する評価を行なった。測定に用いた試料は，長さ L，厚さ T，幅 W の直方体であった。以下の問いに答えよ。

図１のように４つの端子 A，B，C，D を試料に接続し電源，電流計，電圧計を配置した。端子間の間隔は，$AB = L_1$，$BC = L_2$，$CD = L_3$ であった。

(1) 電源の電圧 V_0，電流計，電圧計の値がそれぞれ I，V のとき，４端子法によるこの試料の電気抵抗率 ρ はいくらか。

(2) 正確な抵抗値を測定する上で，４端子法が２端子法より優れている点を述べよ。

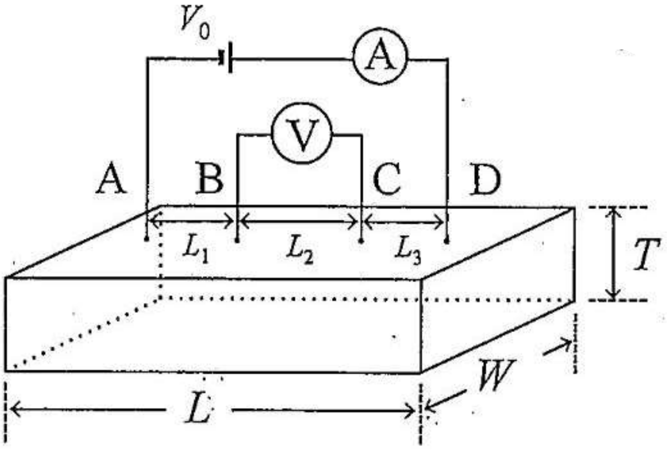


図１

次に，長さ L 方向に電流 I_h を流し，磁場（磁束密度）B を試料の厚さ T 方向にかけ，図2のように電圧計を配置して幅 W 方向の電圧（ホール電圧）を測った。

(3) 磁場 B により１個のキャリアが受けるローレンツ力の大きさはいくらか。電流 I_h，キャリア密度 n，キャリア１個の電荷 q を用いて表せ。

(4) 測定で得られたホール電圧は V_h であった。この電圧の発生により１個のキャリアが受ける静電気力はいくらか。

(5) ローレンツ力と静電気力のつり合いより，キャリア密度を求めよ。

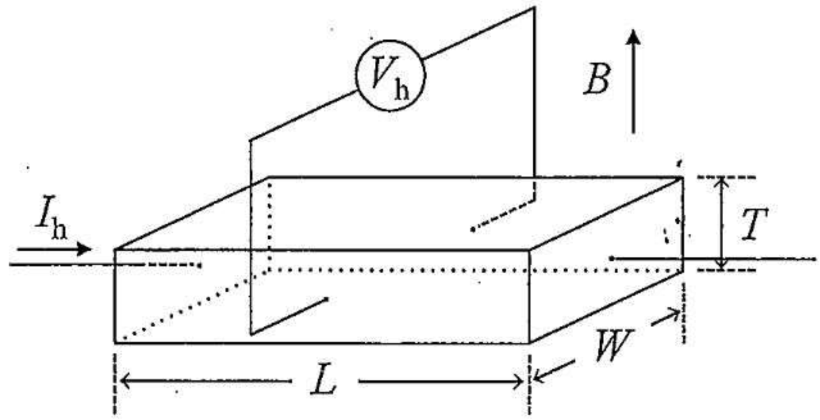


図２

以上の測定で得られた値から物性に関する評価を行なった。

(6) 測定に用いられた試料の移動度を求めよ。

(7) この物質の電気抵抗率は図３の温度変化を示した。キャリア密度と移動度の予想される温度変化の概略を図示せよ。

(8) なぜそのように予想されるか理由を述べよ。

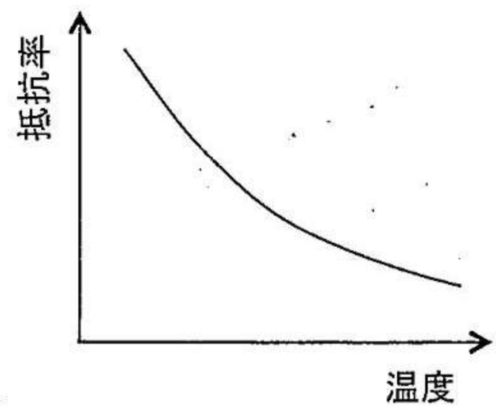


図３

6

I．いかなる割合においてもすべて固溶体を形成する物質 A と物質 B からなる 2 成分系の場合，1 気圧のもとでは下の図のような相図が得られることが知られている。以下の問いに答えよ。

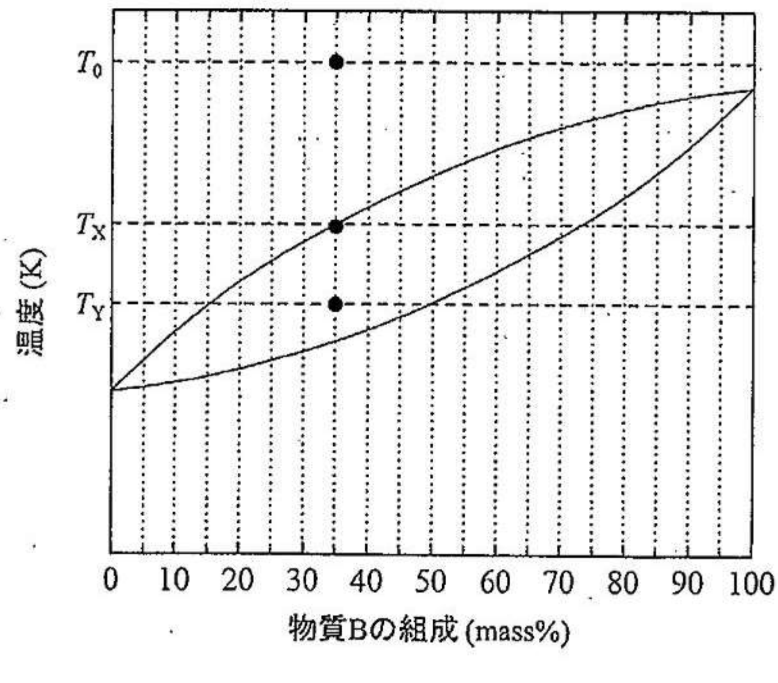
(1) このような相図が得られる 4 つの経験的な条件を示せ。

(2) 物質 B の組成が 35 mass%の液相状態にある溶融物を温度 T_0 から緩やかに冷却する場合を考える。

① この溶融物の温度が T_X になると液相線に到達する。このとき析出する固相中の物質 B の組成を相図から読み取れ。

② さらに温度を T_Y まで緩やかに低下させたときの固相および液相中の物質 B の組成をそれぞれ相図から読み取れ。

③ この溶融物 10 kg の温度を緩やかに T_Y まで低下させたときに得られる固相と液相，それぞれの質量を算出せよ。なお有効桁数は 2 桁とせよ。



II．相平衡に対して成り立つ最も一般的な法則である「Gibbs の相律」は，系に存在する成分数(C)と相数(P)で表される自由度(f)で与えられることが知られている。この f と C および P との関係式を導く以下の文章を読み，問いに答えよ。

今考える系が C 個の成分をもち，P 個の相が存在するものとすると，組成変数の数は［ i ］個となり，これに［ ア ］と［ イ ］の 2 つの変数が加わり，系全体の変数の数は［ i ］+2 個となる。これらの変数を関係付ける 1 組の方程式のひとつは，いずれの相においても全成分のモル分率の和が［ ii ］となることを示すものである。さらにこの式は各相について 1 個ずつあるので，式の数は全部で［ iii ］個となる。もう 1 組の方程式は化学平衡に対する自由エネルギーを規準として考えられる。今，ある成分の微小量を 2 つの相間で移動させたとしよう。平衡状態ではこの移動により生じた自由エネルギーの変化は［ iv ］でなければならない。すなわち移動に伴い起こった自由エネルギー変化は［ ウ ］を引き起こすことになる。このような 2 つの相間での成分の移動による全自由エネルギー変化 δG_T は，それぞれの相中で起こる変化の［ エ ］となる。相 i 中の成分 j の物質量を N_j^i とし自由エネルギーを G_i とすると，成分 j の微小量 δN_j^i を取り除いた場合の自由エネルギー変化 δG_i は，1 次の項だけ考えると［ v ］となる。この取り除いた成分が相 k に移動したとすると同時に［ vi ］となる。平衡状態での移動に伴う全自由エネルギー変化 δG_T は［ iv ］でなければならない。このような関係が任意に選んだすべての 2 相間で成り立つので，C 個の成分が P 個の相の間を移動するすべての可能性に対して平衡状態が成り立つためには，C 個の成分に対して $P-1$ 個，すなわち［ vii ］個の式があることとなる。したがって，C 個の成分をもち P 個の相が存在する系の自由度(f)は，［ viii ］と表される。

(1) （ア）～（エ）に当てはまる適切な語句を，（ i ）～（viii）に当てはまる適切な数値もしくは数式を答えよ。

(2) 設問 I に示した相図に存在する 3 つの相（液相，混合相，固相）および物質 B の融点での自由度(f)を求めよ。