平成３０年度

島根大学大学院総合理工学研究科博士前期課程

総合理工学専攻

（数理科学コース）

入試問題（第１次）

【数　　学】

注　意

1　問題紙は，指示があるまで開いてはならない。

2　問題紙 3ページ，解答用紙 3枚，下書き用紙 1枚である。

　指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。

3　解答は，解答用紙に清書すること。

4　問題紙と下書き用紙は，持ち帰ること。

平成30年度　総合理工学専攻
数理科学コース学力検査問題（必修）

次の2問をすべて解答せよ。

$\boxed{1}$ Aを4次正方行列とする。線形変換

$$f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4,\ f(\mathrm{x}) = A\mathrm{x}$$

は, ある4次正則行列 $P = (\mathrm{x}_1\ \mathrm{x}_2\ \mathrm{x}_3\ \mathrm{x}_4)$ と相異なる複素数 a, b に対し, 次のすべての式をみたすとする。

$$\begin{aligned} f(\mathrm{x}_1) &= a\mathrm{x}_1 \\ f(\mathrm{x}_2) &= \mathrm{x}_1 + a\mathrm{x}_2 \\ f(\mathrm{x}_3) &= b\mathrm{x}_3 \\ f(\mathrm{x}_4) &= \mathrm{x}_3 + b\mathrm{x}_4 \end{aligned}$$

また, Aの任意の固有値λに対し,

$$W_A(\lambda) = \{\mathrm{x} \in \mathbb{C}^4 \mid \text{ある非負整数}\ k\ \text{に対し},\ (A - \lambda E)^k \mathrm{x} = 0\}$$

とおく。次の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{x} \in W_A(\lambda)$ ならば $f(\mathrm{x}) \in W_A(\lambda)$ であることを示せ。

(2) 行列 A と $P^{-1}AP$ の固有多項式は等しいことを示せ。

(3) 行列 $P^{-1}AP$ を求めよ。

(4) Aの固有値をすべて求めよ。

(5) Aは対角化可能かどうか理由をつけて答えよ。

(6) (4)で求めたすべての固有値λに対し, $W_A(\lambda)$の基底を求めよ。ただし, $W_A(\lambda)$の次元は固有値λの重複度に等しいことは用いてもよい。

$\boxed{2}$ nを自然数とする。関数

$$f_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$$

について, 次の問いに答えよ。

(1) $f_1\left(\sqrt{3}\right)$ および $\lim_{x\to\infty} f_1(x)$ を求めよ。

(2) すべての自然数nに対して, 次の漸化式が成り立つことを示せ。

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2n}\left(\frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)\,f_n(x)\right).$$

(3) $a_n = \lim_{x\to\infty} f_n(x)$ とするとき, a_nを求めよ。

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ。任意の実数 s に対して $1 - s \leq e^{-s}$ であることは証明なしに用いてもよい。

平成30年度　総合理工学専攻
数理科学コース学力検査問題（選択）

以下の5問から1問を選択し，解答せよ。

$\boxed{3}$ G を有限群とし $H,\ K$ を G の正規部分群とする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，e は G の単位元とする。また，有限群 S の位数を $|S|$ と表す。

(1) $HK=\{hk \mid h\in H,\ k\in K\}$, $H\cap K$ は G の正規部分群であることを示せ。

(2) 次の条件 (i), (ii) は同値であることを示せ。

  (i) $H\cap K=\{e\}$ である。

  (ii) もし $hk=h'k'$ $(h,h'\in H,\ k,k'\in K)$ なら，$h=h'$ かつ $k=k'$ である。

(3) もし $H\subseteq K$ なら，$|G/H|=|G/K|\,|K/H|$ が成り立つことを示せ。

(4) 次のような，群 $G/(H\cap K)$ から群直積 $G/H\times G/K$ への写像 φ を考える.

$$\varphi : G/(H\cap K)\to G/H\times G/K\ ;\ \varphi(g(H\cap K))=(gH,\ gK)$$

  (i) φ は矛盾なく定義されることを示せ。また，φ は単射準同型写像であることを示せ。

  (ii) もし $|G/H|$ と $|G/K|$ が互いに素であるなら，φ は同型写像であることを示せ。

$\boxed{4}$ 曲面 $\mathrm{p}(u,v)=(3u+3uv^2-u^3, v^3-3v-3u^2v, 3(u^2-v^2))$ について次の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{p}_u,\mathrm{p}_v$ を計算せよ。

(2) 第1基本量 E,F,G を計算せよ。

(3) 曲面の単位法ベクトル ν, および $\mathrm{p}_{uu},\mathrm{p}_{uv},\mathrm{p}_{vv}$ を計算せよ。

(4) 第2基本量 L,M,N を計算せよ。

(5) $A=\begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N\end{pmatrix}$ とする。ガウス曲率 K および平均曲率 H を行列 A を用いて表せ。

(6) 曲面 $\mathrm{p}(u,v)$ が極小曲面であることを示せ。

$\boxed{5}$ $\mathbb{R}$ を実数全体からなる集合，d を $\mathbb{R}$ 上の通常の距離とする。$C(I)$ を区間 $I=[0,1]$ 上の実数値連続関数全体からなる集合とし，$C(I)$ 上の距離 d_∞ を

$$d_\infty(f,g)=\max_{x\in I}|f(x)-g(x)|$$

により定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $f,g\in C(I)$ を $f(x)=x$, $g(x)=-x$ と定めるとき $d_\infty(f,g)$ を求めよ。

(2) $t\in I$ に対して，写像 $A_t:(C(I),d_\infty)\to(\mathbb{R},d);A_t(f)=f(t)$ は連続写像であることを示せ。

(3) $t\in I$ に対して，$V_t=\{f\in C(I):|f(t)|\leq 1\}$ は $(C(I),d_\infty)$ の閉集合であることを示せ。

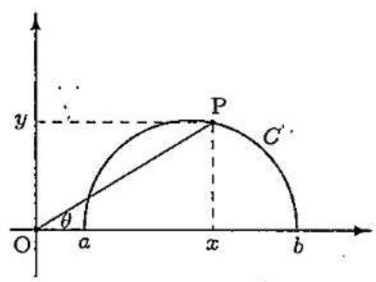
(4) $V=\{f\in C(I):$ 全ての $t\in I$ に対して $|f(t)|\leq 1\}$ は $(C(I),d_\infty)$ の閉集合であることを示せ。

$\boxed{6}$ 次の問いに答えよ。

(1) 次の累次積分を積分の順序交換をして求めよ。

$$\int_0^3\left\{\int_{\sqrt{\frac{y}{3}}}^1\cos\left(\frac{\pi x^3}{2}\right)dx\right\}dy.$$

(2) $\mathrm{O}(0,0)$ を座標平面の原点とし，$0<a<b$ とする。点 $\mathrm{P}(x,y)$ を点 $(a,0)$ と $(b,0)$ を通り x 軸に直交する円の上半部分 C 上の動点とする。x 軸と線分 OP がなす角を θ とするとき，$\sin\theta$ の最大値をラグランジュの未定乗数法を用いて求めよ。



$\boxed{7}$ 関数 $f(x)=\sin^2 x$ と $g(x)=\sin(x^2)$ について，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ と $g(x)$ とは違う関数である理由を述べよ。

(2) $f(x)$ と $g(x)$ は $\mathbb{R}$ で連続であるかないかを論理記号を用いて論じよ。

(3) $f(x)$ と $g(x)$ は $\mathbb{R}$ で一様連続であるかないかを論理記号を用いて論じよ。