

平成30年度  
島根大学大学院自然科学研究科博士前期課程  
理工学専攻  
(数理科学コース)  
入試問題

【 数 学 】

注 意

- 1 問題紙は、指示があるまで開いてはならない。
- 2 問題紙 2 ページ，解答用紙 3 枚，下書き用紙 1 枚である。  
指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
- 3 解答は，解答用紙に清書すること。
- 4 問題紙と下書き用紙は，持ち帰ること。

**平成30年度 理工学専攻  
数理科学コース学力検査問題**

次の3問をすべて解答せよ。

1  $V = \mathbb{R}^3$  とし,  $f: V \rightarrow V$  を次のように定める:

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x + 2y + z \\ -2x + 3y + z \\ 4x - 4y - z \end{bmatrix}$$

このとき, 次の問いに答えよ。

(1)  $f$  は線形写像であることを示せ。

(2)  $f$  の固有値を求めよ。

(3)  $\left\{v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}$  は  $V$  の基底であることを示せ。また, この基底  $\{v_1, v_2, v_3\}$  に対する  $f$  の表現行列を求めよ。

(4)  $f$  を  $n$  回合成した写像を  $f^n$  と表す。  $f^{2017}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}\right)$  を求めよ。

2 正の整数  $n$  に対し,

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

と定める。また,  $H_0(x) = 1$  とする。次の問いに答えよ。

(1)  $H'_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$  であることを示せ。

(2)  $H_n(x)$  は  $n$  次の多項式であり,  $x^n$  の係数は  $2^n$  であることを示せ。

(3)  $m \geq 0, n \geq 1$  のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} H'_m(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2} dx$$

であることを示せ。

(4)  $\int_{-\infty}^{\infty} H_1(x)H_2(x)e^{-x^2} dx$  を求めよ。

(5)  $\int_{-\infty}^{\infty} \{H_2(x)\}^2 e^{-x^2} dx$  を求めよ。  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  であることは証明なしに用いてよい。

3 次問いに答えよ。

(1)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が  $a \in \mathbb{R}$  で微分可能であることの定義を  $\varepsilon$ - $\delta$  論法で述べよ。

(2) 次で定義される関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  の 0 での微分可能性を調べよ。

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

以下、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は  $\mathbb{R}$  で微分可能であるとする。

(3) すべての実数  $x$  に対して  $f'(x) > 0$  が成り立つならば  $f$  は狭義の単調増加、すなわち、 $x_1 < x_2$  ならば  $f(x_1) < f(x_2)$  が成り立つことを示せ。

(4) (3) の逆が成立するかどうかを調べよ。