

平成31年度入試
個別学力試験問題（前期日程）

数 学

[医学部・医学科
総合理工学部・数理科学科]

注 意

1. 問題紙は指示があるまで開いてはいけません。
2. 問題紙は2ページ，解答用紙は4枚です。指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入してください。
3. 答えはすべて解答用紙の所定のところに記入してください。
4. 解答用紙の裏面は使わないでください。
5. 各問題とも必ず解答の過程を書き，結論を明示してください。
小問に分けられているときは，小問の結論を明示してください。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけません。
7. 試験終了後，問題紙は持ち帰ってください。

1 三角形 $\triangle ABC$ の辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c で表し、 $\angle A, \angle B, \angle C$ の大きさをそれぞれ A, B, C で表す。ただし、 $a > b > c$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\sqrt{\frac{ab}{2}} < b$ を示せ。

(2) $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とするとき、次の等式が成り立つことを示せ。

$$c(1 - \cos B) - b(1 - \cos C) = 8R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \sin \frac{B - C}{2}$$

(3) 辺 AB 上の点 M と辺 AC 上の点 N を結ぶ線分 MN が $\triangle ABC$ の面積を 2 等分するとき、 $MN^2 \geq bc(1 - \cos A)$ が成り立つことを示せ。

(4) $\triangle ABC$ の周上の 2 点 P と Q を結ぶ線分 PQ で、 $\triangle ABC$ の面積を 2 等分するとき、線分 PQ の長さの最小値を a, b, c を用いて表せ。

2 次の問いに答えよ。

(1) 4 つの数字 $0, 1, 2, 9$ を並べてできる 4 桁の正の整数は全部でいくつあるか。ただし、同じ数字を何度使ってもよいものとする。

(2) 4 つの数字 $0, 1, 2, 9$ を並べてできる正の整数をすべて考えるとき、1500 を初めて超えるのは小さい方から数えて何番目の数か。ただし、同じ数字を何度使ってもよいものとする。

(3) a, b, c, d はそれぞれ $0, 1, 2, 9$ のいずれかの値をとるとし、同じ値をとってもよいものとする。放物線 $y = x^2 + 2ax + b$ と直線 $y = 2cx + d$ が共有点を持つような組 (a, b, c, d) は全部でいくつあるか。

□3 2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 2, \quad b_1 = 2,$$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{b_n}{4}, \quad b_{n+1} = a_n + b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = \beta(a_n + \alpha b_n)$ をみたす実数 α, β の2つの組 (α_1, β_1) と (α_2, β_2) を求めよ。ただし、 $\alpha_1 < \alpha_2$ とする。
- (2) (1) で求めた α_1 に対して、数列 $\{a_n + \alpha_1 b_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。
- (4) 座標平面において $O(0, 0)$, $A\left(1, -\frac{1}{2}\right)$, $C_n(a_n, b_n)$ とし、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC_n}$ をベクトル \overrightarrow{OA} と $\overrightarrow{OC_n}$ の内積とすると、次の和を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC_n}$$

□4 関数 $f(x)$ ($x > 0$) と正の定数 a に対して、等式

$$\int_a^x f(t) dt = (\log x)^2 - 2 \log x - 8$$

が成り立っているとす。ただし、対数は自然対数とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ を求めよ。
- (2) 上の等式をみたす a をすべて求めよ。
- (3) $x > 0$ のとき、 $\log x < \sqrt{x}$ であることを示し、極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を求めよ。
- (4) 関数 $y = f(x)$ の増減、極値、グラフの凹凸および変曲点を調べ、そのグラフをかけ。