平成 31(2019) 年度個別学力入試前期日程　問題 (数学) 解答

前期日程試験　教育学部・人間科学部・生物資源科学部

※　【出】は「出題意図」を，【解】は「解答又は解答例」を表す。
【解】はいずれも略解である。

$\boxed{1}$ 【出】 2 次方程式，2 次関数，2 次不等式に関する基礎的知識を問う。

【解】

(1)

$$-1 \leqq a \leqq \frac{5}{3}.$$

(2)

$$-\frac{5}{4} \leqq b \leqq \frac{61}{60}$$

$\boxed{2}$ 【出】 図形と計量に関する理解を問う。

【解】

(1) $\triangle \mathrm{AO_1O_2}$, $\triangle \mathrm{BO_1O_2}$ は共に一辺の長さが 1 の正三角形なので

$$\angle \mathrm{AO_1B} = \angle \mathrm{AO_2B} = 120^\circ$$

である。よって円周角の定理より，

$$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AO_1B} = 120^\circ, \angle \mathrm{AQB} = \angle \mathrm{AO_2B} = 120^\circ.$$

$\angle \mathrm{ABQ} = 90^\circ - \theta.$

(2) $\mathrm{AB} = \sqrt{3}$

(3) $\mathrm{AP} = 2\sin\theta$, $\mathrm{AQ} = 2\cos\theta$

(4) $\dfrac{1}{2}$

$\boxed{3}$ 【出】 二次関数の最大・最小，導関数，定積分，面積についての理解度を問う。

【解】

(1) $f(x) = x^2 - (a+b)x + ab$ であるから，I_1 は

$$I_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(a+b) + ab$$

であり，$f'(x) = 2x - (a+b)$ であるから，I_2 は

$$I_2 = \frac{4}{3} - 2(a+b) + (a+b)^2$$

である。したがって，

$$I_2 - 4I_1 = (b-a)^2 \geqq 0$$

であるから，$4I_1 \leqq I_2$ が成り立つ。他にも相加相乗平均を用いた解答などが考えられる。

(2) I_2 の最小値は $\dfrac{1}{3}$ で，I_2 が最小値をとるための条件は $a+b=1$.

(3) $a=\dfrac{1}{4}$, $b=\dfrac{3}{4}$

前期日程試験　総合理工学部 (数理学科を除く)

※　【出】は「出題意図」を,【解】は「解答又は解答例」を表す。
　　【解】はいずれも略解である。

$\boxed{1}$ 【出】 無限級数の収束についての理解を問う。

【解】
(1) $\frac{1}{2}$.
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{24}$.

$\boxed{2}$ 【出】 微分積分法に関する知識・理解を問う。

- 関数の増減、微分係数の幾何的意味、２次不等式の知識および理解について問う。
- 微分と積分の関係の知識・理解について問う。
- 関数の極大極小、接線の方程式および積分に関する知識・理解について問う。

【解】
(1) $\frac{2(\log x - 1)}{x}$.
(2) $a = e^{-2}$ と $a = e^4$.
(3) 前半は $g(x) = \sqrt{x} - \log x$ が，その増減を調べることによって最小値

$$g(4) = 2(1 - \log 2) > 0$$

をとることを示すなどの解答が考えられる。$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.
(4) 次の増減表にしたがって $f(x)$ の増減，極値，変曲点を求める。

$f(x)$ は $x = e^2$ で極大値 $2e^{-2}$ をとり，$(e^{5/2}, 3e^{-5/2})$ を変曲点にもつ。

さらに $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ (問 (3) による), および $f(e) = 0$, $\lim_{x \to +0} f(x) = -\infty$ にも注意して，グラフを描く。

x	0	$\cdots$	e^2	$\cdots$	$e^{5/2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$			$f(e^2)$		$f(e^{5/2})$	

$\boxed{3}$ 【出】図形と計量に関する理解を問う。

【解】

(1) $\triangle \mathrm{AO_1O_2}$, $\triangle \mathrm{BO_1O_2}$ は共に一辺の長さが 1 の正三角形なので

$$\angle \mathrm{AO_1B} = \angle \mathrm{AO_2B} = 120^\circ$$

である。よって円周角の定理より,

$$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AO_1B} = 120^\circ, \angle \mathrm{AQB} = \angle \mathrm{AO_2B} = 120^\circ.$$

$\angle \mathrm{ABQ} = 90^\circ - \theta.$

(2) $\mathrm{AB} = \sqrt{3}$

(3) $\mathrm{AP} = 2\sin\theta,\ \mathrm{AQ} = 2\cos\theta$

(4) $\dfrac{1}{2}$

前期日程試験　総合理工学部・数理科学科，医学部・医学科

※　【出】は「出題意図」を，【解】は「解答又は解答例」を表す。
　　【解】はいずれも略解である。

$\boxed{1}$ 【出】三角形の基礎的知識の確認とその理解度を問う。

【解】

(1) $2b > b + c > a$ より, $2b > a$. よって $\sqrt{\dfrac{ab}{2}} < \sqrt{\dfrac{2b \cdot b}{2}} = b$.

(2) 正弦定理より, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$ であり, 半角の公式より,

$$\sin^2 \frac{B}{2} = \frac{1 - \cos B}{2}, \quad \sin^2 \frac{C}{2} = \frac{1 - \cos C}{2}$$

であるから,

$$c(1 - \cos B) - b(1 - \cos C) = 2R \sin C \cdot 2 \sin^2 \frac{B}{2} - 2R \sin B \cdot 2 \sin^2 \frac{C}{2} \qquad (*)$$

ここで, 2 倍角の公式と加法定理を用いると $(*)$ の右辺は

$$8R \left(\sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} - \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \right) = 8R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \sin \frac{B - C}{2}$$

である。

(3) AM の長さを x, AN の長さを y とすれば, $\triangle \mathrm{AMN} = \frac{1}{2} \triangle \mathrm{ABC}$ から,

$$xy \sin A = \frac{1}{2} bc \sin A$$

であるから, $xy = bc/2$. 余弦定理から,

$$\begin{aligned} \mathrm{MN}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos A &= (x - y)^2 + 2xy - 2xy \cos A \\ &= (x - y)^2 + bc(1 - \cos \mathrm{A}) \geqq bc(1 - \cos \mathrm{A}). \end{aligned}$$

最小値 $bc(1 - \cos \mathrm{A})$ は $x = y$ のとき，すなわち $x = y = \sqrt{\dfrac{bc}{2}}$ のときにとる。

(4) 余弦定理により

$$bc(1 - \cos \mathrm{A}) = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2}$$

である。P, Q を BC, CA 上や，AB, BC 上にとった場合にも (3) と同様に考えれば求める最小値は

$$\sqrt{\frac{a^2 - (b - c)^2}{2}}, \ \sqrt{\frac{b^2 - (c - a)^2}{2}}, \ \sqrt{\frac{c^2 - (a - b)^2}{2}}$$

の中の最小である。

$$a^2-(b-c)^2-(c^2-(a-b)^2)=2(a-c)(a+c-b)>0,$$
$$b^2-(c-a)^2-(c^2-(a-b)^2)=2(b-c)(b+c-a)>0$$

だから，最小値は

$$\sqrt{\frac{c^2-(a-b)^2}{2}}=\sqrt{\frac{(c-a+b)(c+a-b)}{2}}$$

$\boxed{2}$ 【出】場合の数についての理解を問う。２次方程式と２次関数のグラフと直線との共有点についての理解を問う。

【解】

(1) 192.

(2) 112.

(3) 210 通り

$\boxed{3}$ 【出】数列，ベクトルおよび級数の極限に関する理解を問う。

【解】

(1) $(\alpha_1,\beta_1)=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$, $(\alpha_2,\beta_2)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

(2) $a_n-\dfrac{1}{2}b_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

(3) $a_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n, b_n=3\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

(4) 2

$\boxed{4}$ 【出】微分積分法に関する知識・理解を問う。

- 関数の増減、微分係数の幾何的意味、２次不等式の知識および理解について問う。
- 微分と積分の関係の知識・理解について問う。
- 関数の極大極小、接線の方程式および積分に関する知識・理解について問う。

【解】

(1) $\dfrac{2(\log x - 1)}{x}$.

(2) $a = e^{-2}$ と $a = e^4$.

(3) 前半は $g(x) = \sqrt{x} - \log x$ が，その増減を調べることによって最小値

$$g(4) = 2(1 - \log 2) > 0$$

をとることを示すなどの解答が考えられる。$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$

(4) 次の増減表にしたがって $f(x)$ の増減，極値，変曲点を求める。

$f(x)$ は $x = e^2$ で極大値 $2e^{-2}$ をとり，$(e^{5/2}, 3e^{-5/2})$ を変曲点にもつ。

さらに $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ （問 (3) による), および $f(e) = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = -\infty$ にも注意して，グラフを描く。

x	0	$\cdots$	e^2	$\cdots$	$e^{5/2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	$f(e^2)$	$\searrow$	$f(e^{5/2})$	$\searrow$