

平成31年度入試
個別学力試験問題（後期日程）

数 学
〔 数 理 科 学 科 〕

注 意

1. 問題紙は指示があるまで開いてはいけません。
2. 問題紙は2ページ、解答用紙は4枚です。指示があってから確認し、解答用紙の所定の欄に受験番号を記入してください。
3. 答えはすべて解答用紙の所定のところに記入してください。
4. 解答用紙の裏面は使わないでください。
5. 各問題とも必ず解答の過程を書き、結論を明示してください。
小問に分けられているときは、小問の結論を明示してください。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけません。
7. 試験終了後、問題紙は持ち帰ってください。

□1 正の整数 n の正の約数の個数を $d(n)$ と表すとき、次の問いに答えよ。

- (1) $d(1323)$ を求めよ。
- (2) $d(n) = 12$ であるような最小の正の整数 n を求めよ。
- (3) p を素数とする。正の整数 n に対して $d(pn) \leq 2d(n)$ であることを示せ。

□2 点 O を中心とする円に内接する四角形 $ABCD$ について、 $AB = 5$, $BC = 8$, $\angle ABC = 60^\circ$, $AD : CD = 2 : 1$ であるとする。次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。
- (2) $\triangle ACD$ の内接円の半径を求めよ。
- (3) 四角形 $AOCD$ の面積を求めよ。

3 対数は自然対数とし、次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = e, \quad \log a_{n+1} = \frac{1}{2 \log (a_1 a_2 \cdots a_n)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) 次の値を求めよ。

$$\left(\log \frac{a_1}{e}\right)^2 + \left(\log \frac{a_2}{e}\right)^2 + \left(\log \frac{a_3}{e}\right)^2$$

(2) すべての自然数 n に対し、

$$(\log (a_1 a_2 \cdots a_n))^2 - ((\log a_1)^2 + (\log a_2)^2 + \cdots + (\log a_n)^2) = n - 1$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ。

(3) すべての自然数 n に対し、次の値は有理数の平方であることを示せ。

$$\left(\log \frac{a_1}{e}\right)^2 + \left(\log \frac{a_2}{e}\right)^2 + \cdots + \left(\log \frac{a_n}{e}\right)^2$$

4 関数 $f(x)$ ($x > 0$) は導関数 $f'(x)$ と第 2 次導関数 $f''(x)$ をもち、さらに次の 2 つの条件をみたすとする。

(i) すべての正の実数 x, y に対して $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ が成り立つ。

(ii) $f'(1) = 1$

このとき、次の問いに答えよ。

(1) $f(1)$ の値を求めよ。

(2) $f''(x) = \frac{1}{x}$ であることを示せ。

(3) $f(x)$ を求めよ。