「数学:総合理工学部 (数理科学科)」出題意図，解答例

※　【出】は「出題意図」を，【解】は「解答又は解答例」を表す。
【解】はいずれも略解である。

$\boxed{1}$ 【出】 整数の約数，素因数分解に関する基礎的知識を問う。
【解】

(1) 12

(2) 60

(3) $n=1$ のときは，$d(1)=1$, $d(p)=2$ だから，$d(1\times p)=2d(1)$. $n>1$ のとき，n の素因数分解を $n=p_1^{e_1}\cdots p_r^{e_r}$ とする。 次の (i),(ii) の場合に分けて考える。

(i) p がどの p_i とも異なるとき。
pn の素因数分解は $pn=pp_1^{e_1}\cdots p_r^{e_r}$ であるから，

$$d(pn)=2(e_1+1)\cdots(e_r+1)=2d(n)$$

(ii) p が n の素因数のひとつであるとき。
$p=p_1$ としても一般性を失わない。このとき，$pn=p_1^{e_1+1}p_2^{e_2}\cdots p_r^{e_r}$ であるから，

$$\begin{aligned}d(pn)&=(e_1+2)(e_2+1)\cdots(e_r+1)\\&=(e_1+1)(e_2+1)\cdots(e_r+1)+(e_2+1)\cdots(e_r+1)\\&=d(n)+(e_2+1)\cdots(e_r+1)\\&<d(n)+d(n)=2d(n)\end{aligned}$$

である。

$\boxed{2}$ 【出】 三角形の性質，平面図形と計量に関する基礎知識と理解を問う。
【解】

(1) $10\sqrt{3}$

(2) $\dfrac{3\sqrt{21}-7\sqrt{3}}{2}$

(3) $\dfrac{91\sqrt{3}}{12}$

$\boxed{3}$【出】 数学的帰納法，対数関数の計算，等式の証明，数列に関する理解を問う。

【解】

(1) $\dfrac{25}{36}$

(2)

$$A_n = (\log(a_1 a_2 \cdots a_n))^2 - \left((\log a_1)^2 + (\log a_2)^2 + \cdots + (\log a_n)^2\right)$$

とおくとき，すべての自然数 n に対して $A_n = n-1$ であることを示せばよい。$n=1$ のときは $A_1 = (\log a_1)^2 - (\log a_1)^2 = 1-1$ である。$n=k$ のとき，$A_k = k-1$ が正しいと仮定すると，$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= (\log(a_1 a_2 \cdots a_{k+1}))^2 - \left((\log a_1)^2 + (\log a_2)^2 + \cdots + (\log a_{k+1})^2\right) \\ &= (\log(a_1 a_2 \cdots a_k))^2 - \left((\log a_1)^2 + (\log a_2)^2 + \cdots + (\log a_k)^2\right) \\ &\quad +2(\log a_1 \cdots a_k)\log a_{k+1} \\ &= A_k + 1 \\ &= (k-1)+1 = k. \end{aligned}$$

よって $A_{k+1} = (k+1)-1$. したがって数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して $A_n = n-1$ が成り立つ。

(3) 問 (2) より，

$$\begin{aligned} &\left(\log \frac{a_1}{e}\right)^2 + \left(\log \frac{a_2}{e}\right)^2 + \cdots + \left(\log \frac{a_n}{e}\right)^2 \\ &= (\log a_1)^2 + \cdots + (\log a_n)^2 - 2\log(a_1 \cdots a_n) + n \\ &= \left\{(\log(a_1 \cdots a_n))^2 - n + 1\right\} - 2\log(a_1 \cdots a_n) + n \\ &= \{\log(a_1 \cdots a_n) - 1\}^2. \end{aligned}$$

今，$\log a_1 = 1$ であり，数学的帰納法と

$$\log a_{k+1} = \frac{1}{2\log(a_1 a_2 \cdots a_k)} = \frac{1}{2(\log a_1 + \cdots + \log a_k)}$$

を用いて，すべての自然数 n について $\log a_n$ が有理数であることを示すことができる。したがって

$$\log(a_1 \cdots a_n) - 1$$

は有理数であり，題意が成り立つ。

$\boxed{4}$ 【出】 微積分に関する基礎知識と理解を問う。

【解】

(1) $f(1) = 0$

(2) (解答例 1) $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ の両辺を x で微分すると

(∗)
$$yf'(xy) = yf'(x) + f(y).$$

これから
$$f'(xy) - f'(x) = \frac{f(y)}{y}.$$

よって
$$f''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+\frac{h}{x})}{h\left(1+\frac{h}{x}\right)}.$$

$f(1) = 0,\ f'(1) = 1$ であることから
$$f''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{(x+h)}\frac{f(1+\frac{h}{x}) - f(1)}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x}f'(1) = \frac{1}{x}.$$

(解答例 2) (∗) に $x = 1,\ y = x$ を代入すると，$f'(1) = 1$ より，
$$xf'(x) = x + f(x).$$

両辺を x で微分して $xf''(x) + f'(x) = 1 + f'(x)$. よって $f''(x) = \dfrac{1}{x}$.

(3) 問 (2) と $f'(1) = 1$ により，
$$f'(x) = \log x + 1$$

この両辺を x について部分積分して
$$f(x) = x(1+\log x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\log x + C$$

ここで C は積分定数。$f(1) = 0$ により $C = 0$. よって
$$f(x) = x\log x.$$