

平成31年度編入学者選抜試験【一般選抜】問題

## 数 学

(総合理工学部 数理・情報システム学科 数理系)

### 注 意

- 1 問題紙は指示があるまで開いてはいけない。
- 2 問題紙は2ページである。解答用紙は4枚である。指示があつてから確認し、解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
- 3 答えはすべて解答用紙の所定のところに記入すること。
- 4 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
- 5 試験終了後、問題紙は持ち帰ること。

平成 31 年度編入試験問題

問題 1. (この問題の解答は問題 1(1 枚目)に記入すること。)

1.  $V, U$  を  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間とし,  $f$  を  $V$  から  $U$  への線形写像とする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1)  $f(V) = \{f(v) \mid v \in V\}$  は  $U$  の部分空間であることを示せ。
- (2)  $f$  は単射であるとする。このとき,
  - (i)  $V$  のベクトル  $v_1, \dots, v_k$  が 1 次独立であるなら,  $f(v_1), \dots, f(v_k)$  も 1 次独立であることを示せ。
  - (ii)  $v_1, \dots, v_k$  が  $V$  の基底であっても  $f(v_1), \dots, f(v_k)$  は  $U$  の基底であるとは限らないことを示せ。

2. (この問題の解答は問題 1(2 枚目)に記入すること。)

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $A$  の行列式の値を求めよ。
- (2)  $A$  の階数を求めよ。
- (3)  $A$  の固有値と固有ベクトルを求めよ。
- (4)  $\mathbb{R}^3$  から  $\mathbb{R}^3$  への写像  $f$  を次のように定める。

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - z \\ -x - y + z \\ 3x + y - 2z \end{pmatrix}$$

- (i)  $f$  は線形写像であることを示せ。
- (ii)  $f(\mathbb{R}^3)$  の一組の基底を求めよ。

## 問題 2.

1. (この問題の解答は 問題 2(1 枚目) に記入すること。)

- (1) 曲線  $g(x) = e^x(2x^2 - 11x + 16)$  の増減と凹凸を調べ、グラフの概形を描け。
- (2)  $f(x)$  は  $(-\infty, +\infty)$  で定義された連続関数とする。  $F(x) = \int_{-x}^x f(t) dt$  とおくとき、導関数  $F'(x)$  を  $f(x)$  を用いて表せ。
- (3)  $f(x)$  は  $(-\infty, +\infty)$  で定義された下に凸な連続関数とする。このとき、すべての  $x > 0$  に対して次の不等式が成り立つことを示せ。

$$2xf(0) \leq \int_{-x}^x f(t) dt$$

2. (この問題の解答は 問題 2(2 枚目) に記入すること。)

- (1)  $f(x, y) = axy - x^3 - y^3$  とする。ただし、 $a > 0$  である。 $f(x, y)$  の極値が 1 になるときの  $a$  の値を求めよ。
- (2)  $g(x)$  は  $0 < \alpha \leq x \leq \beta$  で連続であり、

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x, 0 \leq y, \alpha \leq x + y \leq \beta\}$$

とする。このとき、

$$\iint_D g(x+y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} xg(x) dx$$

となることを証明せよ。