平成31年度

島根大学大学院自然科学研究科博士前期課程

理工学専攻

（数理科学コース）

入試問題

【数　　学】

<u>注　意</u>

1　問題紙は，指示があるまで開いてはならない。

2　問題紙 3ページ，解答用紙 3枚，下書き用紙 1枚である。

指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。

3　解答は，解答用紙に清書すること。

4　問題紙と下書き用紙は，持ち帰ること。

平成31年度　総合理工学専攻
数理科学コース学力検査問題（必修）

次の2問をすべて解答せよ。

$\boxed{1}$ 実数 x, y は $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$ をみたすとする。行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sin x & 0 & \cos y \\ \sin x & 0 & -\cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

に対し, 次の問いに答えよ。

(1) A の固有値をすべて求めよ。

(2) $x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき, A のすべての固有値に対する固有ベクトルを求めよ。

(3) A が対角化可能であるための x, y に関する必要十分条件を求めよ。

(4) A が対角化不可能であるとき, A のジョルダン標準形 J を求めよ。ただし, $P^{-1}AP = J$ をみたす正則行列 P は求めなくてよい。

$\boxed{2}$ 以下の問に答えよ.

(1) $x > 0$ のとき, $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ であることを示せ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$ の値を求めよ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\sqrt{x}}{e^x - 1 - x}\,dx$ は収束するか.

(4) $\alpha > 0$ とする. 以下で定義される関数 $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ. さらに, $f'(x)$ の $x = 0$ における連続性を調べよ.

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha e^{-1/x}, & x > 0 \text{ のとき}, \\ 0, & x \leq 0 \text{ のとき}. \end{cases}$$

平成31年度　総合理工学専攻
数理科学コース学力検査問題（選択）

以下の4問から1問を選択し，解答せよ。

$\boxed{3}$ (1) G を群とする。H, N を G の部分群とし，H の任意の元 h に対して $hNh^{-1} = N$ が成り立つとする。このとき，次の問いに答えよ。

(i) $HN = \{hn \mid h \in H,\ n \in N\}$ は G の部分群であり，N は HN の正規部分群であることを示せ。

(ii) H から HN/N への写像 f を $f(h) = hN$ と定義する。f は全射準同型写像であることを示せ。ただし，剰余群 HN/N において h をふくむ剰余類を hN と表す。

(iii) $H/H \cap N$ と HN/N は同型であることを示せ。

(2) G を 4 次対称群とし，単位元を e とする。G の部分群 $H = \{e, (1\,2), (1\,3), (2\,3), (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$ と $N = \{e,\ (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$ について，次の問いに答えよ。

(i) HN は G の部分群であることを示せ。

(ii) HN の位数を求め，$G = HN$ であることを示せ。

$\boxed{4}$ $f(u)$, $g(u)$ を実数 u に関する滑らかな関数とし，$f(u) > 0$, $f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1$ を満たすとする。このとき，回転面 $\mathbf{p}(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$ について次の問いに答えよ。ただし，$g'(u) \neq 0$ とする。

(1) 第1基本量 E, F, G を計算せよ。

(2) 曲面の単位法ベクトル ν を計算せよ。

(3) 第2基本量 L, M, N を計算せよ。

(4) $A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ とする。ガウス曲率 K および平均曲率 H を行列 A を用いて表せ。

(5) 曲面 $\mathbf{p}(u,v)$ のガウス曲率 K, 平均曲率 H がそれぞれ $K = -\frac{f''}{f}$, $H = \frac{1}{2}(\frac{g'}{f} - \frac{f''}{g'})$ になることを示せ。

$\boxed{5}$ 次の問いに答えよ。

(1) 次の条件 $(*)$ をみたす数列 $\{x_n\}$ に対し，$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ が成り立つことを証明せよ。

$(*)$ ある自然数 m と $0 < r < 1$ の実数 r があって，$n > m$ のすべての n において

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq r|x_n - \alpha|$$

である。

(2) $x_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = p$ である数列 $\{x_n\}$ に対し，$0 \leq p < 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ が成り立つことを証明せよ。

(3) k を任意の正の数とするとき，$n \to \infty$ における $\dfrac{k^n}{n!}$ の極限を求めよ。

$\boxed{6}$ $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\,e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1) 原点以外での偏導関数 f_x, f_y を求めよ。

(2) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ を求めよ。

(3) $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$ を求めよ。