

平成31年度

島根大学大学院自然科学研究科博士前期課程

理工学専攻

(物理・マテリアル工学コース)

入試問題

【 物理学 】

注 意

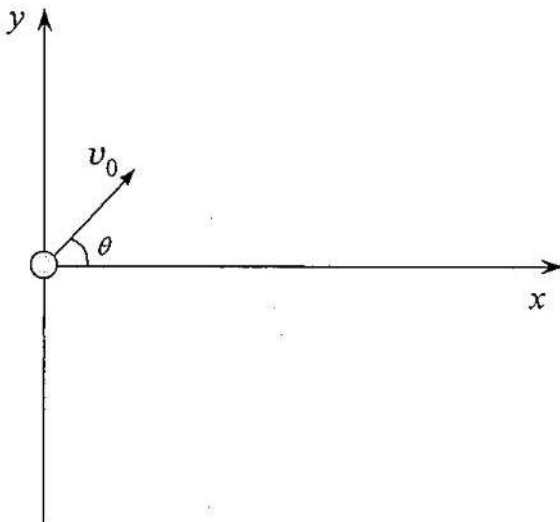
- 1 問題紙は、指示があるまで開いてはならない。
- 2 問題紙 8 ページ、解答用紙 12 枚である。
指示があってから確認し、解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
- 3 解答は、解答用紙に清書すること。
- 4 問題 1 から 4 までの 4 問は必須問題とする。問題 5 と 6 は選択問題とし、いずれか 1 問を選んで解答すること。また、選択した問題の解答用紙には所定欄に○を記入すること。
- 5 解答用紙はすべて回収するので持ち帰らないこと。
- 6 問題紙は、持ち帰ること。

理工学専攻
(物理・マテリアル工学コース) 物理学 問題

1

図のように水平方向に x 軸, 鉛直上向きに y 軸をとる。時刻 $t=0$ において, 質量 m の小球を, 地表面から十分に高い位置から初速度の大きさ $v_0 (> 0)$ で x 軸とのなす角 θ ($0 < \theta < \pi/2$) の方向へ投げた。小球には, その速度ベクトル \mathbf{v} に比例した抵抗力 $-mk\mathbf{v}$ (k は正の定数) が働くものとする。重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ。

- (1) 速度ベクトル \mathbf{v} の x 成分, y 成分をそれぞれ u_x, u_y とする。これらを用いて x 方向, y 方向の運動方程式を書け。
- (2) 時刻 t における u_x, u_y をそれぞれ求めよ。
- (3) u_x の時間変化の概形を, 横軸に時刻 t , 縦軸に u_x をとって図示せよ。
- (4)十分に時間が経った後, 小球はどのような運動をするか説明せよ。
- (5) 小球を投げた点を x 軸の原点にとったとき, 小球の x 方向の最大到達距離を求めよ。



理工学専攻
(物理・マテリアル工学コース) 物理学 問題

2

I. 図1に示すように、半径 R の円形導線に電流 I が流れている。円の中心軸を z 軸とし、円の中心を原点 O とする。点 A 付近の円形導線の微小長さを ds とし、点 A から点 P に向かうベクトルを r 、 $\angle PAO$ を θ とする。また、真空の透磁率を μ_0 とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 A 付近の電流素片 $I ds$ が原点 O から距離 z だけ離れた z 軸上の点 P の位置につくる磁場 (磁束密度) dB の大きさ dB を数式で表せ。
- (2) 円形導線を流れる電流が点 P の位置につくる磁場 B を求めるとき、 B の z 軸方向成分 B_z 以外は、一周積分すると対称性から0になることを考慮し、その大きさ B_z が $\frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}$ で表されることを示せ。

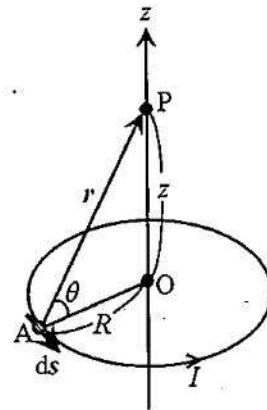


図1

II. 半径 R 、単位長さあたりの巻き数 n のソレノイドコイルがある。ソレノイドの中心軸に沿って z 軸をとる。このソレノイドに電流 I が流れているとき、以下の問いに答えよ。

(1) 図2のように、長さ L のソレノイドの中央を原点 O にとる。 z 軸上の点 z を中心とする微小長さ dz のソレノイドを流れる円形電流 $nI dz$ が点 O につくる磁場の大きさ dB は、

前問 I(2)の結果より、 $dB = \frac{\mu_0 n I dz R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}$ と書け、向きは z 軸正方向となる。円形電流上

の点 Q から点 O に引いた線分 QO と z 軸の正の向きがなす角を φ とし、 $z = -L/2, L/2$ のときの φ を φ_1, φ_2 とする。このとき、ソレノイド全体を流れる電流が点 O につくる

磁場の大きさ B が $\frac{\mu_0 n I (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)}{2}$ となることを示せ。

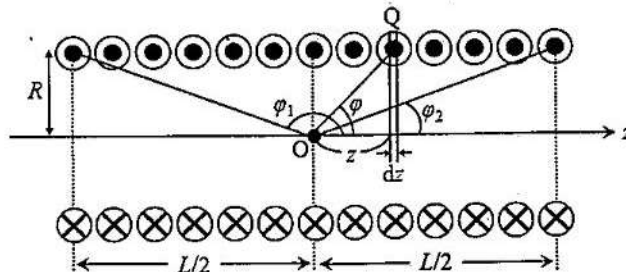


図2

- (2) 図3に示すような z 軸方向に無限に長いソレノイドを考える。このとき、II.(1)の結果を利用し、ソレノイド内部の中心軸上の磁場の大きさを求めよ。
- (3) 一边を中心軸に持つ長方形経路 CDEF に対してアンペールの法則を適用することにより、ソレノイド内部の磁場が一様であることを示せ。
- (4) 一边を中心軸に持つ長方形経路 C'D'E'F' に対してアンペールの法則を適用することにより、ソレノイド外部では磁場が存在しないことを示せ。

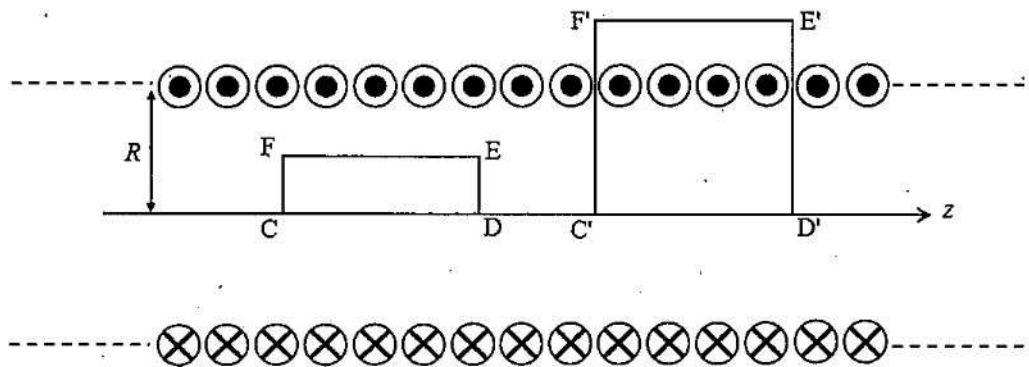


図3

理工学専攻
(物理・マテリアル工学コース) 物理学 問題

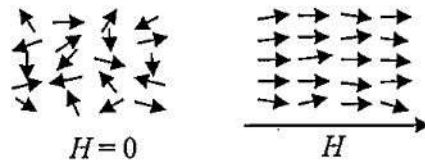
3

I. 各原子に局在した磁気モーメントを持つ常磁性体について考える。その内部エネルギー U の変化量は、 H を磁場の大きさ、 M を磁化の磁場に平行な成分として、熱力学第一法則の式 $dU = TdS + HdM$ で表せる。磁化がキュリー-ワヘール法則 $M = \alpha H/T$ (α は正の定数) に従うものと仮定すると、内部エネルギーは理想気体と同様に温度のみの関数 ($dU = C_M dT$) となる。ここで C_M は定磁化比熱である。以下の問いに答えよ。

- (1) この磁性体を温度 T の熱浴に接触させ、磁場を 0 から H まで増大させた。このときのエントロピー S の変化量は以下のように書けることを示せ。

$$\Delta S = -\frac{\alpha}{2} \left(\frac{H}{T}\right)^2$$

- (2) 図のように、原子の磁気モーメントは磁場の印加により一方向に揃う傾向を示す。この磁気モーメントの状態の変化を踏まえて S が減少する理由を説明せよ。



- (3) (1)の操作を行った後、熱浴から切り離して断熱状態にし、磁場をゆっくりと減少させた (断熱消磁)。このときの磁場に対する温度変化の係数は、

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_S = -\left(\frac{\partial \Delta S}{\partial H}\right)_T / \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial T}\right)_H$$

と書くことができる。この式を(1)の ΔS を用いて計算し、断熱消磁によって温度が下がることを示せ。

II. 0 か ε (> 0) のいずれかのエネルギー状態を取り得る N 個の粒子からなる系を考える。ボルツマン定数を k_B とし、以下の問いに答えよ。

- (1) 1つの粒子についての分配関数 Z_1 を求めよ。
- (2) 任意の温度 T において、各粒子が 0 か ε の各エネルギー準位にある確率をそれぞれ P_0 、 P_ε とするとき P_0 、 P_ε を求めよ。また、その確率が $T=0$ および $T \rightarrow \infty$ (高温極限) のときどのような値をとるか答えよ。
- (3) 個々の粒子間には相互作用が無いものとして系全体の分配関数 Z_N を求め、ヘルムホルツの自由エネルギー F を Z_N を用いて表せ。
- (4) $S = -\partial F / \partial T$ により、エントロピーを求めよ。また、 $T=0$ および $T \rightarrow \infty$ のときの S の値を計算し、(2)の結果を踏まえてその物理的意味を述べよ。

理工学専攻
(物理・マテリアル工学コース) 物理学 問題

4

I. 角運動量演算子 $L = (L_x, L_y, L_z)$ は、次の交換関係を満たす ($\hbar = 1$ とする)。

$$[L_x, L_y] = iL_z, \quad [L_y, L_z] = iL_x, \quad [L_z, L_x] = iL_y$$

$|L|^2 = L \cdot L = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ は L_z と可換であり、 $|L|^2$ と L_z は同時固有状態を持つ。規格化された同時固有状態を $|\ell, m\rangle$ と記し、これが

$$|L|^2 |\ell, m\rangle = \ell(\ell + 1) |\ell, m\rangle, \quad L_z |\ell, m\rangle = m |\ell, m\rangle$$

をみたすことを既知とする。ただし、 ℓ は非負の整数、 m は $|m| \leq \ell$ をみたす整数である。以下の問いに答えよ。

- (1) $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$ (複号同順) を定義する。 $[L_z, L_{\pm}] = L_{\pm}$ を示せ。
- (2) $L_+ |\ell, m\rangle$ もまた L_z の固有状態であり、対応する固有値が $(m + 1)$ であることを示せ (ただし、 $m \neq \ell$)。
- (3) $L_- L_+ = |L|^2 - L_z^2 - L_z$ を示せ。
- (4) (2) から、 $L_+ |\ell, m\rangle$ は $|\ell, m + 1\rangle$ に比例するので、比例定数を $C_{\ell m}$ とすれば、次が成り立つ。

$$L_+ |\ell, m\rangle = C_{\ell m} |\ell, m + 1\rangle$$

$$\langle \ell, m | L_- = (C_{\ell m})^* \langle \ell, m + 1 |$$

下段の式は上段の式のエルミート共役である ($(L_+)^{\dagger} = L_-$)。このとき、(3) を用いて、比例定数の絶対値が $|C_{\ell m}| = \sqrt{(\ell - m)(\ell + m + 1)}$ となることを示せ。

II. 以下では、 $\ell = 1$ ($m = -1, 0, 1$) の場合を考えて、固有状態 $|1, m\rangle$ を、 $|m\rangle$ と略記する。すなわち、 $L_z |m\rangle = m |m\rangle$ ($m = -1, 0, 1$) が成り立ち、

$$L_{\pm} |m\rangle = \sqrt{(1 \mp m)(1 \pm m + 1)} |m \pm 1\rangle \quad (\text{複号同順})$$

が成り立つ。これらに基づいて、以下の問いに答えよ。

- (1) ハミルトニアンが $H_0 = -\mathbf{h} \cdot \mathbf{L}$ で表される系を考える。 $\mathbf{h} = (0, 0, h)$ であるとき、 $|m\rangle$ が H_0 の固有状態であることを示し、対応する固有エネルギー (ε_m とする) を求めよ。
- (2) 以下では $h > 0$ とする。このとき、無摂動系 H_0 の基底状態は $|1\rangle$ である。 $|1\rangle$ に関する $L_y = (L_+ - L_-)/(2i)$ の行列要素 $\langle m | L_y | 1 \rangle$ のうち、0 でないものを全て求めよ。なお、固有状態は正規直交系を成す。
- (3) H_0 に、摂動として $V = -h_y \cdot \mathbf{L}$ を加えた系を考える (ハミルトニアンは $H = H_0 + V$ で与えられる)。 $\mathbf{h}_y = (0, h_y, 0)$ であり、 $|h_y| \ll |h|$ とする。 H で表される系の基底状態のエネルギー E_1 を、 h_y の 2 次まで明示せよ。

理工学専攻
(物理・マテリアル工学コース) 物理学 問題

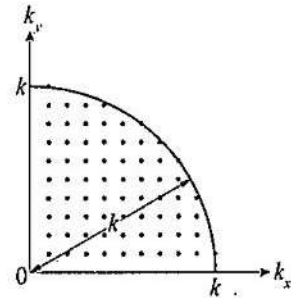
5

固体中の電子状態を、自由電子モデルに基づいて記述する。体積 V の固体を一辺の長さが L の立方体とし($V = L^3$)、電子をその立方体中に閉じ込められた質量 m の自由粒子と考える。

系の固有関数 $\psi_k(r)$ は、 $\psi_k(r) = \varphi_{k_x}(x)\varphi_{k_y}(y)\varphi_{k_z}(z)$ ($\varphi_{k_\mu}(\mu) = \sqrt{2/L} \sin(k_\mu \mu)$; $\mu = x, y, z$)

と表される。 μ 方向の両端における固定端境界条件 $\varphi_{k_\mu}(0) = \varphi_{k_\mu}(L) = 0$ のために、波数ベクトルの μ 成分 k_μ は、自然数 n_μ ($n_\mu = 1, 2, 3, \dots$) を用いて $k_\mu = n_\mu \pi / L$ と量子化されているので、電子状態は量子化された波数ベクトル $k = (k_x, k_y, k_z)$ で指定される。対応する固有エネルギー ε_k は $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2 / (2m)$ と表される (k は k の大きさ)。

電子はフェルミ粒子であるので、固体中の電子数を増やすと、エネルギーの低い準位から順に、対応する k で指定される状態が電子に占有されていく。 k_x, k_y, k_z を軸とする波数空間内で許される状態は、間隔が π/L の格子点上にのみ存在する。すなわち、波数空間の体積 π^3/V 当たり一つの波数状態が存在する。一つの波数状態は、異なるスピン状態の2個の電子が占有できる。これらの事実に基づき、以下の問いに答えよ。



- (1) 固体の体積 V が大きい極限(熱力学極限)では、等エネルギー準位にある波数空間の点は、図のように、半径 k の球面を成す。系の電子状態が自然数 n_μ ($\mu = x, y, z$) を用いて指定されることに注意して、スピン自由度を含めた電子数が N のとき、熱力学極限での N と k の関係式が $N = V k^3 / (3\pi^2)$ となることを示せ。
- (2) (1)で求めた関係式に、エネルギー $\varepsilon = \hbar^2 k^2 / (2m)$ を代入して、 N を ε の関数として表せ(ε の関数としての N を、 $N(\varepsilon)$ と表す)。さらに、状態密度 $D(\varepsilon) = dN(\varepsilon)/d\varepsilon$ を求めよ。
- (3) 全電子数を N_e とする。(2)で導いた $N(\varepsilon)$ が N_e と等しくなるエネルギー(フェルミ準位のエネルギー)を ε_F とする。すなわち、 $N(\varepsilon_F) = N_e$ の等式から ε_F が定まる。(2)で導いた $D(\varepsilon)$ の $\varepsilon = \varepsilon_F$ での値 $D(\varepsilon_F)$ が、 $D(\varepsilon_F) = 3N_e / (2\varepsilon_F)$ となることを示せ。
- (4) 自由電子モデルに基づくと、 $T \ll T_F$ ($T_F = \varepsilon_F / k_B$, k_B はボルツマン定数)となる温度 T では、固体内電子の常磁性帯磁率が温度に依らない一定値 $\chi_P = 2\mu_B^2 D(\varepsilon_F)$ (パウリ常磁性)となることが知られている。ただし、 μ_B はボーア磁子である。この帯磁率 χ_P と、 N_e の全電子の磁気モーメントが帯磁率に寄与するとした値 $\chi(T) = N_e \mu_B^2 / (k_B T)$ との比に着目して、 $T \ll T_F$ において帯磁率に寄与する電子の割合 r を、 T と T_F を用いて表せ。さらに、 $T \ll T_F$ となる低温では、一部の電子しか帯磁率に寄与しない理由を簡潔に述べよ。

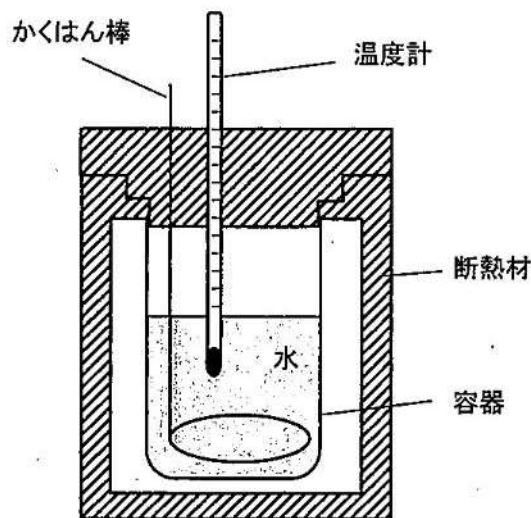
理工学専攻
(物理・マテリアル工学コース) 物理学 問題

6

容器・かくはん棒・温度計・断熱材からなる下図の水熱量計を用いて次の手順で金属試料の比熱を測定した。なお、特に断らない場合は、比熱は単位質量あたりの熱容量であるとする。

- ① 水熱量計に水（質量 M_w ）を入れて十分に長い時間静置した。
- ② 測定試料を投入する前の水熱量計の水温 T_0 を測った。
- ③ 試料（質量 M_s ）を加熱し温度を T_3 にした。
- ④ 試料を素早く水熱量計に入れ、かくはんしながら水温の時間変化を計測した。
- ⑤ しばらくののち、水温は T_1 で安定した。
- ⑥ 以上の実験により得られた数値から、試料の比熱 C_s を算出した。ただし、水熱量計の中で水温と同じ温度変化をする部分の水当量（この部分と同一の熱容量を持つ水の質量）は w であることを、あらかじめ別途求めておいた。

- (1) 試料が失った熱量はいくらか。
- (2) 水の比熱を C_w とするとき、水と水熱量計が試料から受け取った熱量はいくらか。
- (3) 試料が失った熱量と、水と水熱量計が試料から受け取った熱量が等しいとして、試料の比熱 C_s を表す式を導け。



- この実験で、ある金属試料の比熱を測定した。得られた実験結果は表1の通りであった。
- (4) 有効数字を考慮して、この金属試料の比熱を計算せよ。水の比熱を $4.186 \text{ J/g}\cdot\text{K}$ とする。

表2にはいくつかの金属の原子量と室温における比熱、密度を示す。

- (5) 測定した金属試料の材質を推定したい。実験の精度を考慮して、表2に記載の金属の中から材質の候補を全て挙げよ。
- (6) 得られる比熱の有効数字の桁数を増やすためには、どうすれば良いか。
- (7) 測定した質量や温度の値が十分に高い精度を持っているとき、得られた比熱の値が真の値からずれる要因として考えられることを挙げよ。
- (8) 表2の物性値を用いて、Al, Cu, Feの1 molあたりの比熱（モル比熱）を求め、金属のモル比熱についての特徴を述べよ。

表1 ある金属試料について測定された数値

試料の質量	135.0 g
水の質量	235.0 g
容器などの水当量	15.0 g
投入前の試料の温度	96.3 °C
投入前の水温	20.1 °C
投入後の水温	22.3 °C

表2 いくつかの金属の原子量と室温における比熱、密度

金属	原子量	比熱 ($\text{J/g}\cdot\text{K}$)	密度 (g/cm^3)
Ag	107.9	0.233	10.5
Al	27.0	0.877	2.69
Cu	63.5	0.380	8.93
Fe	55.8	0.437	7.86
Sn	118.7	0.224	7.28
Zn	65.4	0.383	7.12