平成 31 年度

島根大学大学院自然科学研究科博士前期課程

理工学専攻

（数理科学コース）（第 2 次）

入試問題

【数　　学】

注　意

1　問題紙は，指示があるまで開いてはならない。

2　問題紙　2 ページ，解答用紙　3 枚，下書き用紙　1 枚である。

　指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。

3　解答は，解答用紙に清書すること。

4　問題紙と下書き用紙は，持ち帰ること。

平成31年度　理工学専攻
数理科学コース学力検査問題（第2次）（必修）

次の2問をすべて解答せよ。

$\boxed{1}$　V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，W と U を V の部分空間とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $W \cap U$ および $W + U = \{w + u \mid w \in W, u \in U\}$ は V の部分空間であることを示せ。

(2) $W \cap U = \{0\}$ とする。

(i) W の1次独立なベクトル $w_1, \ldots, w_k$ と U の1次独立なベクトル $u_1, \ldots, u_l$ に対して，$w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_l$ は1次独立であることを示せ。

(ii) $\dim W + \dim U = \dim(W + U)$ であることを示せ。

(3) $W + U = V$ とし，$w_1, \ldots, w_k$ を W の基底，$u_1, \ldots, u_l$ を U の基底とする。

(i) $w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_l$ は V を生成することを示せ。

(ii) もし $k + l = \dim V$ なら，$w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_l$ は V の基底であることを示せ。

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。

(1) x を正の実数とするとき，次の2つの広義積分の値を求めよ。

$$\text{(a)} \int_0^\infty e^{-xt} \sin t \, dt, \qquad \text{(b)} \int_0^\infty e^{-xt} \cos t \, dt$$

(2) $t > 0$ のとき，$\left| \dfrac{\sin t}{t} \right| < 1$ が成り立つことを示せ。

(3) x を正の実数とするとき，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \, dt$ は収束することを示せ。

(4) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^\infty e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \, dt = 0$ を示せ。

平成31年度　理工学専攻
数理科学コース学力検査問題（第2次）（選択）

以下の2問から1問を選択し，解答せよ。

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が $a\in\mathbb{R}$ で連続であることの定義を ε-δ 論法で述べよ。

(2) 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が $a\in\mathbb{R}$ で連続ならば，$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ $(x_n\neq a)$ となる任意の実数列 $\{x_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$ が成り立つことを証明せよ。

(3) 次で定義される関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が0で連続かどうかを述べ，証明せよ。

(a) $f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$　　(b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|+x^2}{x} & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$

$\boxed{4}$ $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 $f(x,y)=xe^{-x^2-y^2}$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) 1次偏導関数 f_x，f_y および2次偏導関数 f_{xx}，f_{xy}，f_{yx}, f_{yy} を求めよ。

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ。

(3) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$ のとき，二重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$ の値を求めよ。