令 和 2 年 度 入 試

個別学力試験問題(前期日程)

数　　　学

[医　学　部・医　学　科
総合理工学部・数理科学科]

注　意

1. 問題紙は指示があるまで開いてはいけません。
2. 問題紙は3ページ，解答用紙は4枚です。指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入してください。
3. 答えはすべて解答用紙の所定のところに記入してください。
4. 解答用紙の裏面を使ってはいけません。
5. 各問題とも必ず解答の過程を書き，結論を明示してください。小問に分けられているときは，小問の結論を明示してください。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけません。
7. 試験終了後，問題紙は持ち帰ってください。

$\boxed{1}$ 自然数 m，n に対し，m と n の最大公約数を $\gcd(m,n)$ で表す。以下はユークリッドの互除法を用いた最大公約数の求め方である。

ユークリッドの互除法

m, n を $m > n$ をみたす自然数とし，$r_1 = m$，$r_2 = n$ とおく。r_1 を r_2 で割った商を q_2，余りを r_3 $(0 \leqq r_3 < r_2)$ とする。もし $r_3 \neq 0$ ならば r_2 を r_3 で割った商を q_3，余りを r_4 $(0 \leqq r_4 < r_3)$ とする。この手順を $k-1$ 回繰り返したとき，余り r_{k+1} が 0 になれば，次の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
r_1 &= m \\
r_2 &= n \\
r_1 &= r_2 q_2 + r_3 \quad (0 < r_3 < r_2) \\
r_2 &= r_3 q_3 + r_4 \quad (0 < r_4 < r_3) \\
&\ \vdots \\
r_{k-2} &= r_{k-1} q_{k-1} + r_k \quad (0 < r_k < r_{k-1}) \\
r_{k-1} &= r_k q_k
\end{aligned}$$

このとき，m と n の最大公約数について，

$$\gcd(m,n) = \gcd(r_1, r_2) = \gcd(r_2, r_3) = \cdots = \gcd(r_{k-1}, r_k) = r_k$$

が成り立つ。

自然数 n に対し，すべての位の数字が 1 である n 桁の自然数を a_n とおく。例えば，$a_1 = 1$，$a_2 = 11$，$a_3 = 111$ であり，すべての n に対して

$$a_n = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 10^k$$

である。次の問いに答えよ。

(1) ユークリッドの互除法を用いて，12345 と 54321 の最大公約数を求めよ。

(2) $m > n$ をみたす自然数 m と n に対し，等式 $a_m - a_n = 10^n a_{m-n}$ が成り立つことを示せ。

(3) すべての自然数 n に対し，a_n と 10 は互いに素である。このことと (2) の結果を用いて，$m > n$ をみたす自然数 m と n に対し，$\gcd(a_m, a_n) = \gcd(a_n, a_{m-n})$ が成り立つことを示せ。

(4) $m > n$ をみたす自然数 m と n の最大公約数を d とすると，a_m と a_n の最大公約数は a_d であることを示せ。ただし，必要であれば，枠で囲まれたユークリッドの互除法の説明文で使用されている記号を用いてもよい。

(5) (1) と (4) を用いて，a_{12345} と a_{54321} の最大公約数を求めよ。

$\boxed{2}$ $a \fallingdotseq 1$ とする。円 C_1: $x^2+y^2-4ax-2ay = 5-10a$, 円 C_2: $x^2+y^2 = 10$, 円 C_3: $x^2 + y^2 - 8x - 6y = -10$ について，次の問いに答えよ。

(1) 円 C_1 が原点を通るとき，円 C_1 の中心と半径を求めよ。

(2) 定数 a の値にかかわらず円 C_1 は定点 A を通る。この定点 A の座標を求めよ。

(3) 円 C_2 と円 C_3 の 2 つの交点と原点を通る円の中心と半径を求めよ。

$\boxed{3}$ 1枚のコインを投げて，表が出た場合は得点1を，裏が出た場合は得点2を与える。コインを k 回投げたときの得点の合計が n である確率を $p(k,\ n)$ とし，$c_n = \sum_{k=1}^{n} p(k,\ n)$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。ただし，コインの表と裏の出る確率は等しいものとする。

(1) c_2，　c_3 を求めよ。

(2) $p(k+1,\ n+2)$ を $p(k,\ n+1)$ と $p(k,\ n)$ を用いて表せ。

(3) c_{n+2} を c_{n+1} と c_n を用いて表せ。

(4) 漸化式

$$c_{n+2} - \alpha c_{n+1} = \beta(c_{n+1} - \alpha c_n) \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたす実数の組 (α, β) を2つ求めよ。

(5) 数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ。ただし，対数は自然対数とする。

(1) $x > 0$ のとき，不等式 $2\sqrt{x} > \log x$ を証明せよ。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x+1}$ を求めよ。

(3) a は正の定数で，不等式 $\dfrac{\log x}{x+1} \leqq \log \dfrac{ax}{x+1}$ がすべての正の数 x に対して成り立つとする。このとき，a の値の範囲を求めよ。

(4) 等式 $\displaystyle\int_1^2 \log \frac{ax}{x+1}\, dx = 2\int_1^2 \frac{\log x}{x^2}\, dx$ が成り立つような正の数 a を求めよ。