令 和 2 年 度 入 試

個別学力試験問題(前期日程)

数　　　　学

物理・マテリアル工学科
物　質　化　学　科
地　球　科　学　科
知能情報デザイン学科
機械・電気電子工学科
建築デザイン学科

注　意

1. 問題紙は指示があるまで開いてはいけません。
2. 問題紙は2ページ，解答用紙は3枚です。指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入してください。
3. 答えはすべて解答用紙の所定のところに記入してください。
4. <u>解答用紙の裏面を使ってはいけません。</u>
5. 各問題とも必ず解答の過程を書き，結論を明示してください。小問に分けられているときは，小問の結論を明示してください。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけません。
7. 試験終了後，問題紙は持ち帰ってください。

$\boxed{1}$ 自然数 m，n に対し，m と n の最大公約数を $\gcd(m,n)$ で表す。以下はユークリッドの互除法を用いた最大公約数の求め方である。

ユークリッドの互除法

m,n を $m>n$ をみたす自然数とし，$r_1=m$，$r_2=n$ とおく。r_1 を r_2 で割った商を q_2，余りを r_3 $(0 \leqq r_3 < r_2)$ とする。もし $r_3 \neq 0$ ならば r_2 を r_3 で割った商を q_3，余りを r_4 $(0 \leqq r_4 < r_3)$ とする。この手順を $k-1$ 回繰り返したとき，余り r_{k+1} が 0 になれば，次の関係式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
r_1 &= m \\
r_2 &= n \\
r_1 &= r_2 q_2 + r_3 \quad (0 < r_3 < r_2) \\
r_2 &= r_3 q_3 + r_4 \quad (0 < r_4 < r_3) \\
&\ \vdots \\
r_{k-2} &= r_{k-1} q_{k-1} + r_k \quad (0 < r_k < r_{k-1}) \\
r_{k-1} &= r_k q_k
\end{aligned}
$$

このとき，m と n の最大公約数について，

$$\gcd(m,n) = \gcd(r_1,r_2) = \gcd(r_2,r_3) = \cdots = \gcd(r_{k-1},r_k) = r_k$$

が成り立つ。

自然数 n に対し，すべての位の数字が 1 である n 桁の自然数を a_n とおく。例えば，$a_1=1$，$a_2=11$，$a_3=111$ であり，すべての n に対して

$$a_n = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 10^k$$

である。次の問いに答えよ。

(1) ユークリッドの互除法を用いて，12345 と 54321 の最大公約数を求めよ。

(2) $m>n$ をみたす自然数 m と n に対し，等式 $a_m-a_n=10^n a_{m-n}$ が成り立つことを示せ。

(3) すべての自然数 n に対し，a_n と 10 は互いに素である。このことと (2) の結果を用いて，$m>n$ をみたす自然数 m と n に対し，$\gcd(a_m, a_n)=\gcd(a_n, a_{m-n})$ が成り立つことを示せ。

(4) $m>n$ をみたす自然数 m と n の最大公約数を d とすると，a_m と a_n の最大公約数は a_d であることを示せ。ただし，必要であれば，枠で囲まれたユークリッドの互除法の説明文で使用されている記号を用いてもよい。

(5) (1) と (4) を用いて，a_{12345} と a_{54321} の最大公約数を求めよ。

$\boxed{2}$ k を実数とし，双曲線 $x^2-y^2=1$ と直線 $2x-y+k=0$ が異なる 2 点 P，Q で交わるとする。線分 PQ の中点を R とする。次の問いに答えよ。

(1) k の値の範囲を求めよ。

(2) 点 R の座標を k を用いて表せ。

(3) k が (1) で求めた範囲を動くとき，点 R の軌跡を求めよ。

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\displaystyle\int x\sin x\,dx$ と $\displaystyle\int x^2\sin x\,dx$ を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$，$g(x)$ が

$$f(x)=(x^2+2)\sin x+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} g(t)dt$$
$$g(x)=(-2x+\pi)\sin x+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt$$

をみたすとき，$f(x)$，$g(x)$ を求めよ。