令 和 2 年 度 入 試

個別学力試験問題(後期日程)

# 数 学

[数 理 科 学 科]

注 意

1. 問題紙は指示があるまで開いてはいけません。
2. 問題紙は2ページ，解答用紙は4枚です。指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入してください。
3. 答えはすべて解答用紙の所定のところに記入してください。
4. 解答用紙の裏面を使ってはいけません。
5. 各問題とも必ず解答の過程を書き，結論を明示してください。小問に分けられているときは，小問の結論を明示してください。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけません。
7. 試験終了後，問題紙は持ち帰ってください。

$\boxed{1}$ 座標平面上の点 $\mathrm{A}_n(p_n,\ q_n)$ を $p_1=\dfrac{1}{3}$，　$q_1=\dfrac{\sqrt{5}}{6}$,

$$p_n=\frac{2p_{n-1}-\sqrt{5}q_{n-1}}{6},\quad q_n=\frac{\sqrt{5}p_{n-1}+2q_{n-1}}{6}\quad (n=2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}|$ を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が単位円 $x^2+y^2=1$ 上を一周するとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の最大値 $a_n$ と最小値 $b_n$ を求めよ。

(3) (2) の $a_n$ と $b_n$ を用いて，数列 $\{c_n\}$ を

$$c_n=\begin{cases} a_n & (n\text{ が奇数のとき}) \\ b_n & (n\text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

によって定めるとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ の和を求めよ。

$\boxed{2}$ $\triangle\mathrm{OAB}$ において $\mathrm{OA}=3$, $\mathrm{OB}=2$, $\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ とする。点 B を通り，直線 OA に平行な直線が，$\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線と交わる点を C とする。また，点 B を通り，直線 OC に直交する直線が，直線 OA と交わる点を K とし，直線 KC, AB の交点を L とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 直線 OC, KB の交点を H とするとき，$\triangle\mathrm{OHB}$ と $\triangle\mathrm{CHB}$ は合同であることを示せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ となる実数 $s$, $t$ の値を求めよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OL}}=u\vec{a}+v\vec{b}$ となる実数 $u$, $v$ の値を求めよ。

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{OL}}|$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ。

(1) 次の不等式をみたす座標平面上の点 $(x,\ y)$ が存在する範囲を図示せよ。

$$\log_2 x + \log_2 y + \log_2 2 > \log_2(x+y) + \log_2(x-y)$$

(2) 次の不等式をみたす座標平面上の点 $(x,\ y)$ が存在する範囲を図示せよ。

$$\log_{\frac{1}{3}}(4-3x+y) > \log_{\frac{1}{3}}\frac{3}{2} + 2\log_{\frac{1}{3}} x$$

(3) 次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。ただし，数列の各項は正の実数であるとする。また，$e$ は自然対数の底である。

$$a_1 = e^2, \quad e^2 {a_n}^3 = {a_{n+1}}^5 \ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$\boxed{4}$ 座標平面上を動く点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 $t$ における座標を

$$x = 2\sqrt{2}\sin t, \quad y = \frac{1}{2}\sin 2t$$

とする。$C$ を $y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}$ で与えられる曲線とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 時刻 $t$ における点 P の速度 $\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$ を $t$ を用いて表せ。

(2) $0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲で，点 P が曲線 $C$ 上にある時刻 $t$ をすべて求めよ。

(3) $t$ が $0$ から $\pi$ まで動くとき，点 P が初めて曲線 $C$ 上にある時刻と次に $C$ 上にある時刻との間に動いた道のりを求めよ。