前期日程試験　総合理工学部・数理科学科，医学部・医学科

※　【出】は「出題意図」を，【解】は「解答又は解答例」を表す。

【解】はいずれも略解である。

$\boxed{1}$ 【出】

(1) ユークリッドの互除法を用いた最大公約数を求める計算力を問う。

(2) 式の変形に関する計算力を問う。

(3) 最大公約数に関する理解と思考力を問う。

(4) ユークリッドの互除法と最大公約数に関する理解と思考力を問う。

(5) 基礎的な文章読解力を問う。

【解】

(1) ユークリッドの互除法から $\gcd(12345, 54321) = 3$ である。

(2)

$$\begin{aligned} a_m - a_n &= \sum_{k=0}^{m-1} 10^k - \sum_{k=0}^{n-1} 10^k = \sum_{k=n}^{m-1} 10^k = 10^n \sum_{k=n}^{m-1} 10^{k-n} \\ &= 10^n \sum_{k=0}^{m-n-1} 10^k = 10^n a_{m-n} \end{aligned}$$

(3) $x = \gcd(a_m, a_n)$，$y = \gcd(a_n, a_{m-n})$ とおく。y は a_n と a_{m-n} の約数であることと $a_m = 10^n a_{m-n} + a_n$ から y は a_m の約数でもある。よって y は a_m と a_n の公約数なので，$y \leqq x$ である。また，x は a_m と a_n の約数であることと，$a_m - a_n = 10^n a_{m-n}$ から x は $10^n a_{m-n}$ の約数である。ここで，a_n と 10 は互いに素であるので，x と 10 も互いに素である。よって，x は a_{m-n} の約数である。以上から x は a_n と a_{m-n} の公約数であるので，$x \leqq y$ である。前半と後半の議論から，$x = y$ が成り立つ。

(4) $r_1 = m$，$r_2 = n$ とおき，ユークリッドの互除法の説明における記号を用いる。(3) を繰り返し用いると，$\gcd(a_{r_1}, a_{r_2}) = \gcd(a_{r_2}, a_{r_1 - r_2}) = \gcd(a_{r_2}, a_{r_1 - 2r_2}) = \cdots = \gcd(a_{r_2}, a_{r_1 - q_2 r_2}) = \gcd(a_{r_2}, a_{r_3})$ である。同様に，$\gcd(a_{r_2}, a_{r_3}) = \gcd(a_{r_3}, a_{r_4}) = \cdots = \gcd(a_{r_{k-1}}, a_{r_k})$ が成り立つ。$a_{r_{k-1}} = a_{r_k q_k}$ から再び (3) を繰り返し用いると，$\gcd(a_{r_{k-1}}, a_{r_k}) = \gcd(a_{r_k q_k}, a_{r_k}) = \gcd(a_{r_k}, a_{r_k(q_k-1)}) = \gcd(a_{r_k}, a_{r_k(q_k-2)}) = \cdots = \gcd(a_{r_k}, a_{r_k}) = a_{r_k}$ である。よって $\gcd(a_{r_{k-1}}, a_{r_k}) = a_{r_k} = a_d$ である。以上から，$\gcd(a_m, a_n) = a_d$ である。

(5) (1) から $\gcd(12345, 54321) = 3$ なので，(4) を用いると

$$\gcd(a_{12345}, a_{54321}) = a_3 = 111$$

である。

$\boxed{2}$ 【出】図形の方程式についての理解を問う。

【解】

(1) C_1 の中心は $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$, 半径は $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(2) $(2, 1)$

(3) 中心は $\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$, 半径は $\dfrac{5}{2}$

$\boxed{3}$ 【出】確率，数列の漸化式に関する基本知識を問う。

【解】

(1) $c_2 = \dfrac{3}{4}$, $c_3 = \dfrac{5}{8}$

(2) $p(k+1, n+2) = \dfrac{1}{2}p(k, n+1) + \dfrac{1}{2}p(k, n)$

(3) $c_{n+2} = \dfrac{1}{2}c_{n+1} + \dfrac{1}{2}c_n$

(4) (α, β) の組は $\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$ と $\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$

(5) $c_n = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

$\boxed{4}$ 【出】数学 III の範囲で，微分法・積分法の基本的な知識を問う。

【解】

(1) $f(x) = 2\sqrt{x} - \log x$ とおく。 $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$ なので，増減表は以下の通り。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	2(極小値)	↗

よって，$x > 0$ で常に $f(x) > 0$ であるので，$2\sqrt{x} > \log x$

(2) 0

(3) $a \geqq 2$

(4) $a = \dfrac{27}{32}e$