前期日程試験　総合理工学部 (数理科学科を除く)

※　【出】は「出題意図」を,【解】は「解答又は解答例」を表す。
【解】はいずれも略解である。

$\boxed{1}$ 【出】

(1) ユークリッドの互除法を用いた最大公約数を求める計算力を問う。
(2) 式の変形に関する計算力を問う。
(3) 最大公約数に関する理解と思考力を問う。
(4) ユークリッドの互除法と最大公約数に関する理解と思考力を問う。
(5) 基礎的な文章読解力を問う。

【解】

(1) ユークリッドの互除法から $\gcd(12345, 54321) = 3$ である。

(2)

$$a_m - a_n = \sum_{k=0}^{m-1} 10^k - \sum_{k=0}^{n-1} 10^k = \sum_{k=n}^{m-1} 10^k = 10^n \sum_{k=n}^{m-1} 10^{k-n}$$
$$= 10^n \sum_{k=0}^{m-n-1} 10^k = 10^n a_{m-n}$$

(3) $x = \gcd(a_m, a_n)$, $y = \gcd(a_n, a_{m-n})$ とおく。y は a_n と a_{m-n} の約数であることと $a_m = 10^n a_{m-n} + a_n$ から y は a_m の約数でもある。よって y は a_m と a_n の公約数なので, $y \leqq x$ である。また, x は a_m と a_n の約数であることと, $a_m - a_n = 10^n a_{m-n}$ から x は $10^n a_{m-n}$ の約数である。ここで, a_n と 10 は互いに素であるので, x と 10 も互いに素である。よって, x は a_{m-n} の約数である。以上から x は a_n と a_{m-n} の公約数であるので, $x \leqq y$ である。前半と後半の議論から, $x = y$ が成り立つ。

(4) $r_1 = m$, $r_2 = n$ とおき, ユークリッドの互除法の説明における記号を用いる。(3) を繰り返し用いると, $\gcd(a_{r_1}, a_{r_2}) = \gcd(a_{r_2}, a_{r_1 - r_2}) = \gcd(a_{r_2}, a_{r_1 - 2r_2}) = \cdots = \gcd(a_{r_2}, a_{r_1 - q_2 r_2}) = \gcd(a_{r_2}, a_{r_3})$ である。同様に, $\gcd(a_{r_2}, a_{r_3}) = \gcd(a_{r_3}, a_{r_4}) = \cdots = \gcd(a_{r_{k-1}}, a_{r_k})$ が成り立つ。$a_{r_{k-1}} = a_{r_k q_k}$ から再び (3) を繰り返し用いると, $\gcd(a_{r_{k-1}}, a_{r_k}) = \gcd(a_{r_k q_k}, a_{r_k}) = \gcd(a_{r_k}, a_{r_k(q_k-1)}) = \gcd(a_{r_k}, a_{r_k(q_k-2)}) = \cdots = \gcd(a_{r_k}, a_{r_k}) = a_{r_k}$ である。よって $\gcd(a_{r_{k-1}}, a_{r_k}) = a_{r_k} = a_d$ である。以上から, $\gcd(a_m, a_n) = a_d$ である。

(5) (1) から $\gcd(12345, 54321) = 3$ なので，(4) を用いると

$$\gcd(a_{12345}, a_{54321}) = a_3 = 111$$

である。

$\boxed{2}$ 【出】 平面図形，特に双曲線や軌跡に関する理解を問う。

【解】

(1) $k < -\sqrt{3},\ k > \sqrt{3}$

(2) $\left(-\dfrac{2}{3}k, -\dfrac{1}{3}k\right)$

(3) $y = \dfrac{1}{2}x \quad \left(x < -\dfrac{2}{3}\sqrt{3},\ \dfrac{2}{3}\sqrt{3} < x\right)$

$\boxed{3}$ 【出】不定積分と定積分についての理解を問う。

【解】

(1)

$$\int x \sin x \; dx = -x \cos x + \sin x + C,$$
$$\int x^2 \sin x \; dx = (-x^2 + 2) \cos x + 2x \sin x + C.$$

C は積分定数。

(2)

$$f(x) = (x^2 + 2) \sin x + \frac{\pi}{3},$$
$$g(x) = (-2x + \pi) \sin x + \frac{2\pi}{3}.$$