

2020 年度入試【編入学一般入試】問題

数 学

(総合理工学部 数理科学科)

注 意

- 1 問題紙は指示があるまで開いてはならない。
- 2 問題紙は 2 ページである。解答用紙は 4 枚である。
指示があってから確認し、解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
- 3 解答はすべて解答用紙の所定のところに記入すること。
- 4 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
- 5 試験終了後、問題紙は持ち帰ること。

2020 年度編入試験問題

問題 1.

(この問題の解答は 問題 1 (1 枚目) と 問題 1 (2 枚目) に記入すること。)

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) A の固有値, 固有ベクトルを求めよ。

(2) A^n を求めよ。

2. $M(3, \mathbb{R})$ を 3 次実正方行列全体とする。また,

$$W = \{X \in M(3, \mathbb{R}) \mid \text{tr}(X) = 0\}$$

とする。ここで, $\text{tr}(X)$ は X のトレースである。すなわち, $X = (x_{ij})$ とすると, $\text{tr}(X) = x_{11} + x_{22} + x_{33}$ である。次の問いに答えよ。

(1) W は $M(3, \mathbb{R})$ の部分空間であることを示せ。

(2) W の基底を 1 組求め, その理由を述べよ。

3. a を実数, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。線形写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

と定める。 f の核を $\text{Ker } f$, 像を $\text{Im } f$ で表す。必要なら a による場合分けを行い, それぞれの場合に $\text{Ker } f$, $\text{Im } f$ の次元を求めよ。さらに $\text{Ker } f$, $\text{Im } f$ の基底をそれぞれ 1 組ずつ求めよ。

問題 2.

1. (この問題の解答は 問題 2 (1 枚目) に記入すること。)

$\sin^{-1}x$ ($-1 < x < 1$) を $\sin x$ の逆関数とし, $f(x) = \sin(2\sin^{-1}x)$ とおく。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ は次の微分方程式をみたすことを示せ。

$$(1 - x^2)y'' - xy' + 4y = 0.$$

(2) $y = f(x)$ に対して, $(1 - x^2)^2 y''' + p(x)y' + q(x)y = 0$ が成り立つような x の多項式 $p(x), q(x)$ を 1 組求めよ。

(3) $f(x)$ の増減を調べ, $f(x)$ が最大値をとる x の値と最小値をとる x の値をそれぞれ求めよ。

(4) 次の定積分を計算せよ。

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \sin^{-1}x \, dx.$$

2. (この問題の解答は 問題 2 (2 枚目) に記入すること。)

$f(x, y) = \frac{4}{(2 + x^2 + y)^2}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $f(x, y)$ の偏導関数を求めよ。

(2) 点 $P(1, -1, 1)$ における, 曲面 $z = f(x, y)$ の接平面の方程式を求めよ。

(3) $a > 0$ に対して, $D(a) = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq x^2\}$ とおく。2重積分

$$I(a) = \iint_{D(a)} f(x, y) \, dx dy$$

を計算せよ。さらに, $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a)$ を求めよ。