令和２（２０２０）年度

島根大学大学院自然科学研究科博士前期課程

理工学専攻

(数理科学コース)

入試問題

【数　　学】

注　意

1　問題紙は，指示があるまで開いてはならない。

2　問題紙 ４ページ，解答用紙 ３枚，下書き用紙 １枚である。

指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。

3　解答は，解答用紙に清書すること。

4　問題紙と下書き用紙は，持ち帰ること。

2020年度　理工学専攻
数理科学コース学力検査問題（必修）

次の２問をすべて解答せよ．

$\boxed{1}$ V を実数体 $\mathbb{R}$ 上の３次元ベクトル空間とし，$\{v_1, v_2, v_3\}$ を V の基底とする．$f : V \to V$ を線形写像とし，基底 $\{v_1, v_2, v_3\}$ に関する f の表現行列を $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -8 & -2 & -8 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(v_1)$ を v_1, v_2, v_3 の１次結合として表せ．

(2) f の像の次元を求めよ．また，f の核の基底を v_1, v_2, v_3 を用いて表せ．

(3) $\begin{cases} w_1 = v_1 \phantom{{}-2v_2} - v_3 \\ w_2 = 2v_1 - 2v_2 - v_3 \\ w_3 = -v_1 + v_2 + v_3 \end{cases}$ とする．$\{w_1, w_2, w_3\}$ は V の基底であることを示せ．

(4) (3) の基底 $\{w_1, w_2, w_3\}$ に関する f の表現行列 B を求めよ．

(5) f の固有値を求めよ．

$\boxed{2}$ 広義積分 I を次で定める．

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\, dx$$

次の問いに答えよ．

(1) $y = \pi - x$ と変数変換することにより $\displaystyle\int_0^{\pi} \log(\sin x)\, dx = 2I$ を示せ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx = 2I$ を示せ．

(3) $I = -\dfrac{\pi}{2}\log 2$ となることを示せ．

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x}\, dx = -I$ となることを示せ．

2020年度　理工学専攻
数理科学コース学力検査問題（選択）

次の5問から1問を選択し，解答せよ．

$\boxed{3}$ $G = \langle a \rangle$ を巡回群とし，e を G の単位元とする．また G の生成元 a の位数は pq (ただし p, q は異なる素数) とする．次の問いに答えよ．

(1) 整数 m, n に対し，$a^m = a^n$ が成り立つための必要十分条件は，$m \equiv n \pmod{pq}$ であることを示せ．

(2) 群 G の位数は pq であることを示せ．

(3) $\langle a^p \rangle \cap \langle a^q \rangle = \{e\}$ を示せ．

(4) $G = \langle a^p \rangle \langle a^q \rangle$ を示せ．

(5) 位数が pq である G の元の個数を答えよ．

$\boxed{4}$ 曲面の第1基本量 E, F, G，第2基本量 L, M, N で表される行列

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

の固有値を λ_1, λ_2 とする．また，曲面のガウス曲率を K，平均曲率を H と表す．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\det A$，$\frac{1}{2}\mathrm{tr} A$ を λ_1, λ_2 を用いて表せ．ただし，$\mathrm{tr} A$ は A のトレースを表すものとする．

(2) $\det A, \frac{1}{2}\mathrm{tr} A$ を E, F, G, L, M, N を用いて表せ．

(3) (1) を用いて $H^2 - K \geq 0$ を示せ．さらに，曲面上の点が臍点（せいてん）であることと，その点で $H^2 - K = 0$ となることは同値であることを示せ．ここで，曲面の臍点とは $\lambda_1 = \lambda_2$ を満たす点をいう．

(4) 極小曲面のガウス曲率は $K \leq 0$ となることを示せ．

$\boxed{5}$ 1次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分集合 $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ をそれぞれ有理数全体からなる集合，整数全体からなる集合とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{R}$ の閉集合であるかどうか判定せよ．

(2) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の開集合であるかどうか判定せよ．

(3) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ を全単射とするとき，f は $\mathbb{R}$ の部分空間 $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{R}$ の部分空間 $\mathbb{Z}$ への連続写像となりうるかどうか調べよ．

$\boxed{6}$ 関数

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt, \quad x > 0$$

および

$$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) 変数変換 $t = s^2$ を用いて，$\Gamma(x) = 2\displaystyle\int_0^\infty e^{-s^2} s^{2x-1}\, ds$ を示せ．

(2) 極座標を与える写像 $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\Phi(r, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を考える．Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ．

(3) $D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ のとき，$\displaystyle\iint_{D_1} f(x, y)\, dxdy$ を求めよ．

(4) $D_2 = \{(x, y) \mid -R \leq x \leq R,\ -R \leq y \leq R\}$ のとき，

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{D_1} f(x, y)\, dxdy = \lim_{R\to\infty} \iint_{D_2} f(x, y)\, dxdy$$

であることを用いて，$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$ を示せ．

(5) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ．

$\boxed{7}$ 実数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ について $\lim_{n\to\infty} x_n = x,\ \lim_{n\to\infty} y_n = y$ とする．このとき次の問いに答えよ．

(1) $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|$ が成立することを数列の極限の定義に従って証明せよ．

(2) 任意の実数 a, b に対して $\lim_{n\to\infty} (ax_n + by_n) = ax + by$ が成立することを数列の極限の定義に従って証明せよ．

(3) 実数 $a,\ b$ のうち小さくない方の数を $\max\{a, b\}$ で表すとする．このとき

$$\max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}$$

であることを示せ．

(4) $\lim_{n\to\infty} \max\{x_n, y_n\} = \max\{x, y\}$ であることを証明せよ．