令和２（２０２０）年度

島根大学大学院自然科学研究科博士前期課程

理工学専攻

（数理科学コース）

入試問題（第２次）

【数　　学】

注　意

1　問題紙は，指示があるまで開いてはならない。

2　問題紙　4ページ，解答用紙　３枚，下書き用紙　１枚である。

指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。

3　解答は，解答用紙に清書すること。

4　問題紙と下書き用紙は，持ち帰ること。

2020年度　理工学専攻
数理科学コース学力検査問題（第２次）（必修）

次の２問をすべて解答せよ。

$\boxed{1}$ n を 3 以上の自然数とする。$(1, 1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-2})$ を右に一つずつ循環して縦に並べて作られる n 次正方行列を M_n とおく。例えば

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

n 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ には標準的なエルミート内積

$$(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} + \cdots + z_n\overline{w_n},\ \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

が与えられているとする。また，$f_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ を M_n が定める線形写像

$$f_n\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right) = M_n \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

とする。次の問いに答えよ。

(1) M_3 のすべての固有値とそれらに対する固有ベクトル空間を求めよ。

(2) M_4 は固有値 $0, 2$ をもつ。M_4 の固有値 $0, 2$ に対する固有ベクトル空間をそれぞれ求めよ。

(3) $W(2)$ を M_4 の固有値 2 に対する固有ベクトル空間とする。$\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^4$ が $W(2)$ と直交するとき，$f_4(\boldsymbol{z})$ も $W(2)$ と直交することを示せ。

(4) M_n は固有値 2 をもつことを示せ。M_{2k} $(k \geq 2)$ は固有値 0 をもつことを示せ。

$\boxed{2}$ 正の実数 x に対し，$f(x) = \displaystyle\int_{2\pi}^{x} \frac{\sin\theta}{\theta}\,d\theta$ と定義する。次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2\pi} \frac{f(x)}{(x-2\pi)^2}$ を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ に対し，

$$f(x) = a + b\frac{\cos x}{x} + c\int_{2\pi}^{x} \frac{\cos\theta}{\theta^2}\,d\theta$$

が成り立つように定数 a, b, c の値を定めよ。

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_{2\pi}^{\infty} \frac{\sin\theta}{\theta}\,d\theta$ は収束することを示せ。

(4) 正の実数 x に対し，

$$\left| \int_{x}^{\infty} \frac{\sin\theta}{\theta}\,d\theta - \frac{\cos x}{x} \right| \leq \frac{2}{x^2}$$

が成立することを示せ。

(5) 広義積分 $\displaystyle\int_{2\pi}^{\infty} \left| \frac{\sin\theta}{\theta} \right| d\theta$ は収束するか。

2020 年度　理工学専攻
数理科学コース学力検査問題（第２次）（選択）

次の２問から１問を選択し，解答せよ。

$\boxed{3}$ 一般線形群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) = \{A \mid 2\text{次正方行列, 正則}\}$ の元 A に対し, 写像 $\varphi_A : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ を $\varphi_A(X) = AXA^{-1}$ と定義する。次の問いに答えよ。

(1) 集合 $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{C}^{\times} \right\}$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の部分群であることを示せ。

(2) (1) の H は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の正規部分群であることを示せ。

(3) 写像 φ_A は群の同型写像であることを示せ。

(4) $\Phi = \{\varphi_A \mid A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\}$ とおく。Φ は写像の合成により, φ_E (E は単位行列) を単位元にもつ群である。写像 $F : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \Phi$,　$F(A) = \varphi_A$ は群の準同型写像であることを示せ。

(5) (1),(2) の正規部分群 H に対し, 剰余群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/H$ は (4) の群 Φ と同型であることを示せ。

$\boxed{4}$ $\mathbb{R}$ の部分集合族 $\mathcal{S}$ を以下のように定める。

$$\mathcal{S} = \{ A \subset \mathbb{R} \mid \text{もし } a \text{ が } a \in A \text{ となるならば} \\ a < b \text{ かつ } [a, b) \subset A \text{ をみたす } b \in \mathbb{R} \text{ が存在する} \}$$

$\mathcal{T}$ を $\mathbb{R}$ におけるユークリッド位相 (通常の位相) とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\mathcal{S}$ は $\mathbb{R}$ における位相となることを示せ。

(2) $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ を示せ。

(3) $f : (\mathbb{R}, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ を次のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

このとき，f は連続となることを示せ。